الباب الأول: التوزيعات التكرارية

1.1. التوزيعات التكرارية : هي عبارة عن جداول تلخص فيها بيانات العينة إلى فئات، ولكل فئة تكرار تتحدد قيمته حسب البيانات. وتسمى البيانات بعد تلخيصها في جداول تكرارية *بالبيانات المبوبة* . وعادة ما نلجأ لهذا الأسلوب إذا كانت لدينا عدد كبير من البيانات.

مثال (1.1) (مثال على البيانات الوصفية) البيانات الآتية تمثل المؤهلات العلمية لعينة من (35) موظف بإحدى الشركات، والمطلوب تلخيص هذه البيانات في جدول تكراري.

ثانوي	ثانوي	دكتوراه	ثانوي	جامعي	جامعي	جامعي
ابتدائي	ثانوي	جامعي	ثانوي	متوسط	جامعي	جامعي
ثانوي	ثانوي	متوسط	ثانوي	ثانوي	جامعي	دكتوراه
جامعي	جامعي	ثانوي	ثانوي	جامعي	ثانوي	جامعي
ثانوي	ثانوي	جامعي	ثانوي	ثانوي	جامعي	متوسط

الحل:

جدول تكراري ⟵ جدول تفريغي

جدول تكراري

عدد الموظفين (f)	المؤهل العلمي (c)
2	دكتوراه
13	جامعي
16	ثانوي
3	متوسط
1	ابتدائي
35	$\sum$

جدول تفريغي

التكرار f	العلامات	الفئات c
2	//	دكتوراه
13	~~////~~ ~~////~~ ///	جامعي
16	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	ثانوي
3	///	متوسط
1	/	ابتدائي
35	المجموع ($\sum$)	

مثال (1.2): (مثال على البيانات المنفصلة) فيما يلي عدد الغيابات لعينة من (30) موظف بإحدى الشركات:

0	3	0	0	3	0
2	2	0	1	2	1
0	0	1	2	4	0
4	2	1	0	1	0
0	2	0	1	3	2

المطلوب: تلخيص بيانات العينة في جدول تكراري.

جدول تفريغي ← جدول تكراري

الفئات c	العلامات	التكرار f
0	卌 卌 //	12
1	卌 /	6
2	卌 //	7
3	///	3
4	//	2
$\sum$		30

عدد الغيابات (c)	عدد الموظفين (f)
0	12
1	6
2	7
3	3
4	2
$\sum$	30

مثال (1.3): (مثال على البيانات المتصلة) البيانات التالية تمثل الأجور اليومية بالريال لعينة مكونة من (50) عامل بإحدى المصانع:

47	36	40	55	75	53	46	43	21	10
66	56	46	35	47	32	52	48	41	30
27	25	57	15	37	22	63	21	61	62
54	42	35	49	39	32	45	31	72	50
65	18	79	23	48	44	32	51	44	42

المطلوب: تلخيص بيانات العينة في جدول تكراري.

الحل: نتبع الخطوات التالية:

1. نحسب المدى (R) والذي يُعَرف بأنه الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة

$$R = \max - \min = 79 - 10 = \boxed{69}$$

2. نوجد عدد الفئات (k)

$$k = 1 + 3.3 \times \log n = 1 + 3.3 \times \log(50)$$
$$= 1 + (3.3 \times 1.69897) = 1 + 5.61 = 6.61 \approx \boxed{7}$$

3. نحدد طول الفئة (h)

$$h = \frac{R}{k} = \frac{69}{7} = 9.86 \approx \boxed{10}$$

4. نكون الجدول التفريغي، بأن نضع الفئات في العمود الأول من الجدول، مع ملاحظة أن الفئة الأولى لابد أن تبدأ أو تشمل أصغر قيمة، والفئة الأخيرة لابد أن تشمل أكبر قيمة، ثم نكمل الحل كالمعتاد.

جدول تفريغي ← جدول تكراري

الفئات c	العلامات	التكرار f
10 -	///	3
20 -	~~////~~ /	6
30 -	~~////~~ ~~////~~	10
40 -	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	15
50 -	~~////~~ ///	8
60 -	~~////~~	5
70 - 80	///	3
$\sum$		50

الأجور (c)	عدد العمال (f)
10 -	3
20 -	6
30 -	10
40 -	15
50 -	8
60 -	5
70 - 80	3
$\sum$	50

ملاحظات هامة:

1. يرمز للفئات بالرمز c وللتكرار بالرمز f وحجم العينة بالرمز n، ويجب أن يكون مجموع التكرارات مساوي لحجم العينة، أي $\sum f = n$
2. في الفئة الأولى "- 10" المقصود بها من 10 إلى أقل من 20، كما أن القيمة 10 تمثل الحد الأدنى للفئة الأولى، وينطبق القول على بقية القيم.
3. طول الفئة هو الفرق بين الحد الأعلى للفئة والحد الأدنى للفئة.

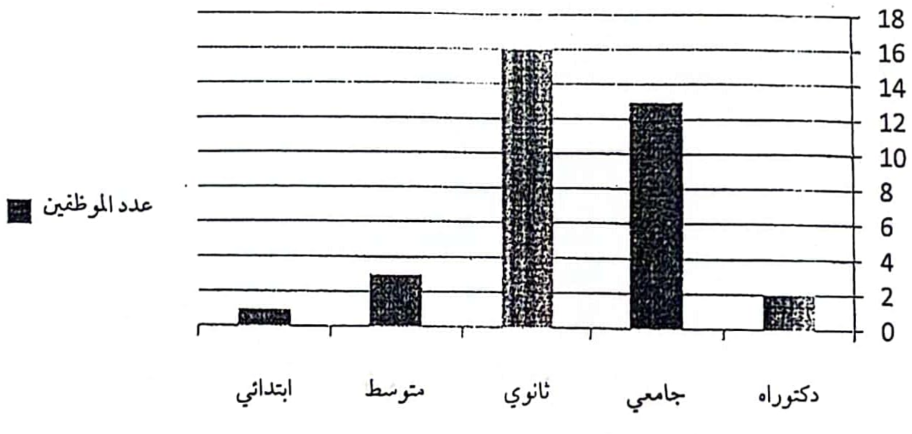
1.2. التمثيل البياني للتوزيع التكراري : يمكن وصف البيانات النوعية والبيانات الكمية المنفصلة باستخدام شكل الأعمدة، أما البيانات الكمية يمكن تمثيلها بالمدرج التكراري أو بالمضلع التكراري أو بالمنحنى التكراري، وخطوات تكوين هذه الأشكال على النحو التالي:

1. رسم محورين؛ الأفقي يمثل الفئات c والرأسي يمثل التكرار f.
2. رسم أعمدة طولها يعتمد على عدد التكرارات، وتكون غير متجاورة إذا كانت البيانات نوعية أو كمية منفصلة، ومتجاورة إذا كانت البيانات كمية ، ويسمى الشكل في هذه الحالة بالمدرج التكراري.
3. لتكوين المضلع التكراري نضع نقاط في منتصف أعمدة المدرج التكراري ثم نقوم بوصلها بخطوط مستقيمة، أما المنحنى التكراري فنقوم بوصل النقاط في منتصف الأعمدة يدوياً.

مثال (1.4): مثل التوزيعات التكرارية في الأمثلة السابقة بما يناسبها من أشكال بيانية.

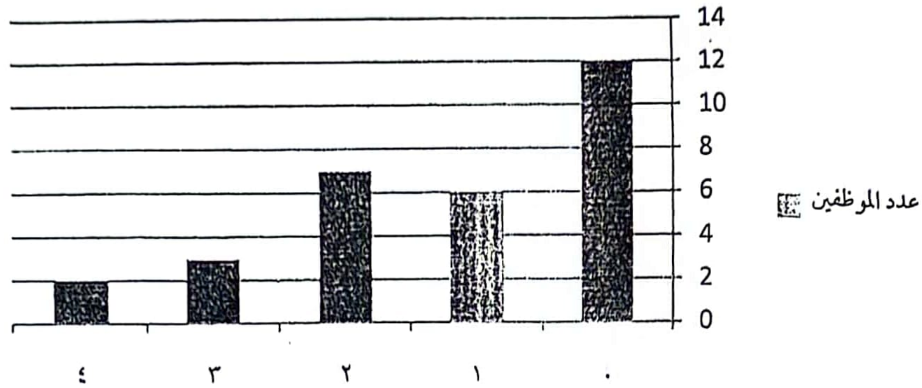
الحل:

توزيع المؤهلات العلمية لعينة الموظفين (شكل الأعمدة)



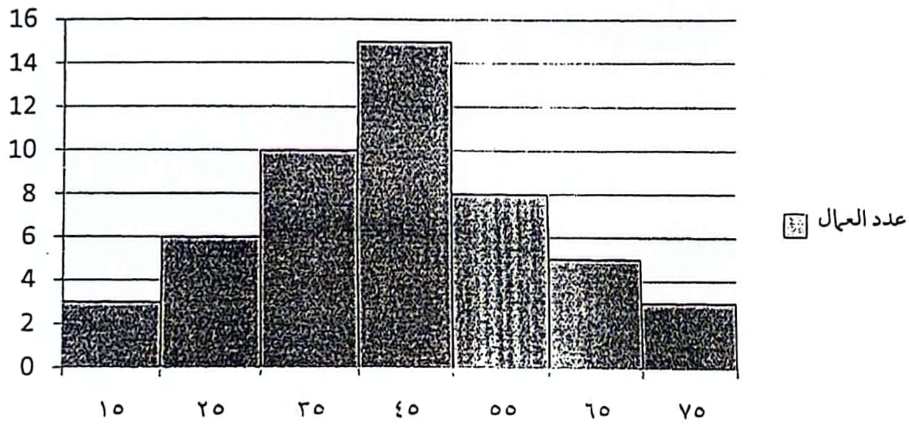
رسم توضيحي 1: توزيع أعداد الموظفين حسب مؤهلاتهم العلمية (مثال 1.1)

توزيع غيابات عينة الموظفين (شكل الأعمدة)



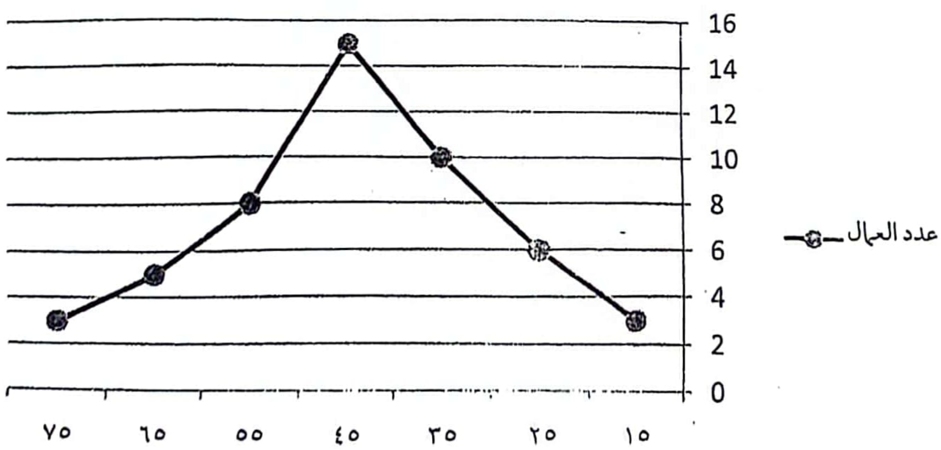
رسم توضيحي 2: توزيع أعداد الموظفين حسب الغياب (مثال 1.2)

توزيع أعداد العمال حسب فئات الأجور (المدرج التكراري)



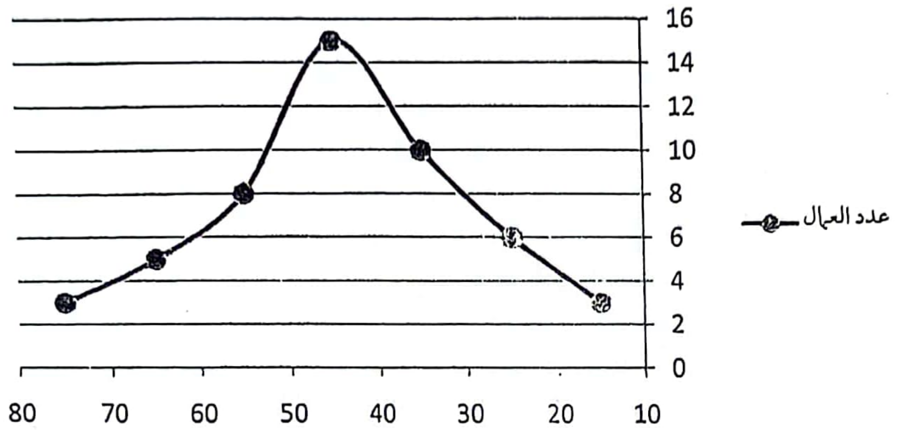
رسم توضيحي 3: توزيع أعداد العمال حسب فئات الأجور (مثال 1.3)

توزيع أعداد العمال حسب فئات الأجور (المضلع التكراري)



رسم توضيحي 4: توزيع أعداد العمال حسب فئات الأجور (مثال 1.3)

توزيع أعداد العمال حسب فئات الأجور (المنحنى التكراري)



رسم توضيحي 5: توزيع أعداد العمال حسب فئات الأجور (مثال 1.3)

1.3. الجداول التكرارية المتجمعة : الجدول التكراري البسيط يعطينا فقط عدد المفردات في كل فئة، ولكننا نحتاج إلى معرفة بيانات تجميعية لا نحصل عليها من الجداول البسيطة مباشرة، ولكن نحصل عليها من الجداول المتجمعة. وهي نوعان:

- **جدول متجمع صاعد** : وهو جدول ذو عمودين، عمود للفئات ويكتب "أقل من الحد الأعلى للفئة"، وعمود للتكرارات ويكتب "تكرار متجمع صاعد " (ت. م. ص.) ونحصل عليه بتجميع التكرارات في الجدول البسيط من بداية الجدول إلى نهايته.
- **(للإطلاع فقط) جدول متجمع نازل** : وهو جدول ذو عمودين، عمود للفئات ويكتب "الحد الأدنى للفئة فأكثر "، وعمود للتكرارات ويكتب "تكرار متجمع نازل" (ت. م. ن.) ونحصل عليه بتجميع التكرارات في الجدول البسيط من نهاية الجدول إلى بدايته.

مثال (1.5): كون الجدول المتجمع الصاعد والنازل لمثال أجور العمال (1.3)

الحل:

جدول متجمع نازل		جدول متجمع صاعد		جدول تكراري	
ت. م. ن.	الحد الأدنى للفئة فأكثر	ت. م. ص.	أقل من الحد الأعلى للفئة	عدد العمال	الأجور
50	10 فأكثر	3	أقل من 20	3	10 -
47	20 فأكثر	9	أقل من 30	6	20 -
41	30 فأكثر	19	أقل من 40	10	30 -
31	40 فأكثر	34	أقل من 50	15	40 -
16	50 فأكثر	42	أقل من 60	8	50 -
8	60 فأكثر	47	أقل من 70	5	60 -
3	70 فأكثر	50	أقل من 80	3	70 - 80
				50	$\sum$

1.4. التمثيل البياني للتوزيع التكراري المتجمع: يتم تمثيل الجدول المتجمع الصاعد بيانيا بالمنحنى المتجمع الصاعد ، كذلك يتم تمثيل الجدول المتجمع النازل بيانياً بالمنحنى المتجمع النازل. وهذه المنحنيات تعطينا البيانات التي لا توفرها الجداول المتجمعة مباشرة، و لإنشاء المنحنى المتجمع، نتبع الخطوات التالية:

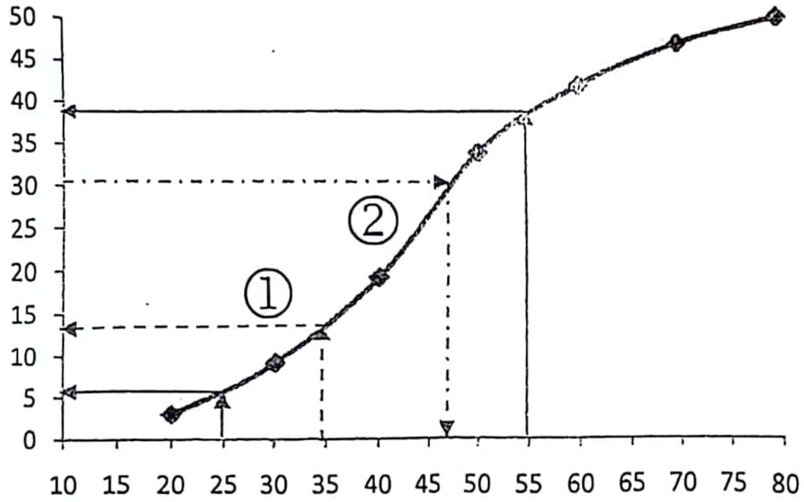
1. رسم محورين؛ الأفقي يمثل الحد الأعلى للفئة والرأسي يمثل ت. م. ص. في حالة التكرار المتجمع الصاعد، وفي حالة التكرار المتجمع النازل يمثل المحور الأفقي الحد الأدنى للفئة والرأسي يمثل ت. م. ن.
2. نحدد نقاط مناسبة حسب التكرار المتجمع، ثم نصلها يدوياً.

مثال (**1.6**): باستخدام الجدول المتجمع الصاعد في المثال (**1.5**)، ارسم المنحنى المتجمع الصاعد. ومن الرسم أوجد:

1. عدد العمال اللذين يقل أجورهم عن **35** ريال.
2. الحد الأعلى للأجور الذي بلغه **30** عامل.
3. نسبة عدد العمال اللذين تتراوح أجورهم اليومية بين **55** و**25** ريال.

الحل:

المنحنى المتجمع الصاعد



ت. م. ص

1. عدد العمال اللذين يقل أجورهم عن 35 ريال = 13 عامل
2. الحد الأعلى للأجور الذي بلغه 30 عامل = 46 ريال
3. نسبة عدد العمال اللذين تتراوح أجورهم اليومية بين 55 و25 ريال =

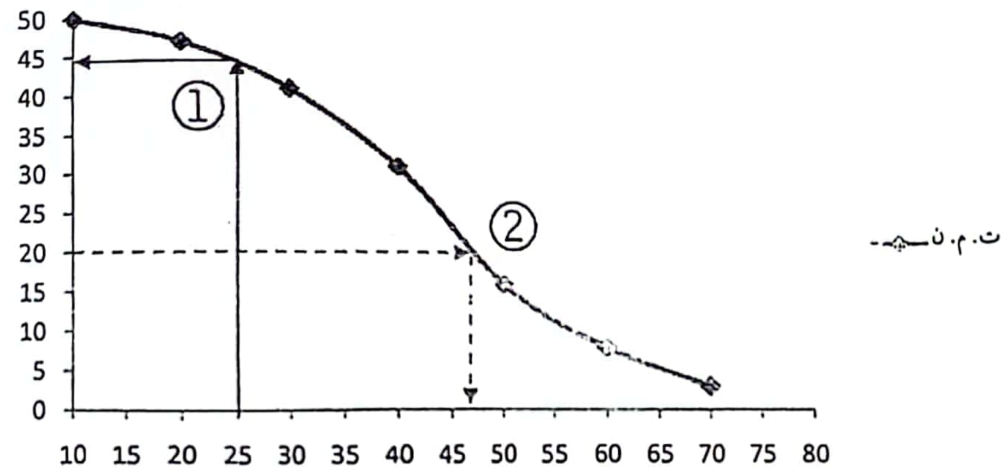
$$\{ (39 - 6) \div 50 \} \times 100 = 66\%$$

مثال (1.7) (للإطلاع فقط) باستخدام الجدول المتجمع النازل في المثال (1.5)، ارسم المنحنى المتجمع النازل. ومن الرسم أوجد:

1. عدد العمال الذين تصل أجورهم 25 ريال فأكثر.
2. الحد الأدنى للأجور الذي بلغه 20 عامل.

الحل:

المنحنى المتجمع النازل



1. عدد العمال الذين تصل أجورهم 25 ريال فأكثر = 44 عامل
2. الحد الأدنى للأجور الذي بلغه 20 عامل = 47 ريال

2.1. مقاييس النزعة المركزية : غالبا ما نلاحظ أن البيانات تميل إلى التركيز حول قيمة معينة. وفي هذه الحالة يمكن استخدام هذه "القيمة المركزية " لتمثيل هذه المجموعة من البيانات والمقاييس المستخدمة في التعرف على هذه القيمة المركزية تسمى "مقاييس النزعة المركزية" . ويجب أن يتوفر في هذه المقاييس الصفات الآتية لكي يكون المقياس جيداً:

- أن يعتمد المقياس في حسابه على كل المشاهدات.
- أن يكون المقياس سهل الحساب والفهم.
- أن يتوفر فيه القابلية للتعامل الجبري.
- ألا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة.

من بين هذه المقاييس: **الوسط الحسابي (أو المتوسط) والوسيط والمنوال** ، ولا تتوفر كل الصفات السابق ذكرها في مقياس واح د، ولكن كل مقياس من هذه المقاييس يفضل استخدامه في حالات معينة ولا يفضل استخدامه في حالات أخرى، وفيما يلي مقارنة بين خصائص المتوسطات المذكورة:

الخاصية / المقياس	المتوسط	الوسيط	المنوال
يعتمد المقياس في حسابه على كل المشاهدات	✓	✗	✗
المقياس سهل الحساب والفهم	✓	✓	✓
يتوفر فيه القابلية للتعامل الجبري	✓	✓	✓
لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة	✗	✓	✓

2.1.1. الوسط الحسابي (المتوسط)

تعريفه: يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم، بأنه مجموع قيم مفردات العينة مقسوماً على حجم العينة، ويرمز له بالرمز ($\bar{x}$).

طرق حسابه:

(أولاً) حالة البيانات الغير مبوبة: نستخدم القانون التالي:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

حيث: $\sum x$: مجموع قيم مفردات العينة n : حجم العينة (عدد المفردات)

مثال (2.1): احسب الوسط الحسابي للأجور اليومية بالدولار للعينة التالية المكونة من خمس عمال بإحدى القطاعات: 50 70 80 90 60

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{(50+70+80+90+60)}{5} = \frac{350}{5} = \boxed{70\$}$$

(ثانياً) حالة البيانات المبوبة: نتبع الخطوات التالية:

1. نضيف للجدول التكراري عمود يمثل مركز الفئة ونرمز له بالرمز X؛ ولحساب مراكز الفئات نتبع ما يلي:
   - نحسب مركز الفئة الأولى = (الحد الأدنى للفئة الأولى + الحد الأدنى للفئة الثانية) ÷ 2
   - نحسب مركز الفئة الثانية = مركز الفئة الأولى + طول الفئة (h)
   - نحسب مركز الفئة الثالثة = مركز الفئة الثانية + h، وهكذا حتى ننتهي من جميع الفئات.
2. نكون عمود آخر يحتوي على حاصل ضرب عمود التكرارات في عمود مركز الفئة.
3. نستخدم القانون التالي:

$$\bar{x} = \frac{\sum f \cdot x}{\sum f}$$

حيث: $\sum f \cdot x$: حاصل ضرب عمود التكرارات في عمود مركز الفئة

$\sum f$: مجموع التكرارات

مثال (2.2): استخدم الجدول التكراري الخاص بأجور العمال اليومية (مثال 1.3) لإيجاد ما يلي:

- مراكز الفئات المختلفة
- حساب الوسط الحسابي (أو المتوسط)

الحل: حيث أن طول الفئة h يساوي 10، فإن:

(1) فئات الأجور (c)	(2) عدد العمال (f)	(3) مراكز الفئات (x)	(4) = (2) × (3) $f \cdot x$
10 -	3	(10+20)÷2 = 15	45
20 -	6	15+h = 15+10 =25	150
30 -	10	35	350
40 -	15	45	675
50 -	8	55	440
60 -	5	65	325
70 - 80	3	75	225
$\sum$	**50** $\sum f$		**2210** $\sum f \cdot x$

$$\bar{x} = \frac{\sum f \cdot x}{\sum f} = \frac{2210}{50} = \boxed{44.2}$$ ريال

2.1.2. الوسيط

تعريفه: هو المفردة التي تقسم مفردات العينة بعد ترتيبها تصاعدياً (أو تنازلياً) إلى قسمين متساويين، بحيث يكون عدد المفردات الأصغر منها في القيمة مساوياً لعدد المفردات الأكبر منها في القيمة، ويرمز له بالرمز (m).

طرق حسابه:

(أولاً) حالة البيانات الغير مبوبة: نتبع الخطوات التالية:

1. نرتب مفردات العينة حسب قيمها إما تصاعدياً أو تنازلياً.
2. إذا كان حجم العينة فردي نستخدم تعريف الوسيط مباشرة، إما إذا كان حجم العينة زوجي فنقوم بإيجاد متوسط قيمة المفردتين التي تتوسط بقية المفردات.

مثال (2.3): احسب وسيط الأجور اليومية بالدولار لعينتي العاملين بإحدى القطاعات التاليتين:

العينة (1): 50 70 80 90 60

العينة (2): 50 70 80 90 60 100

الحل:

العينة (1): لحساب قيمة الوسيط، نرتب القيم تصاعديا فتصبح

50 60 70 80 90

من تعريف الوسيط، نجد أن قيمة الوسيط $m = 70\$$

العينة (2): لحساب قيمة الوسيط، نرتب المفردات حسب قيمها تصاعديا فتصبح

50 60 70 80 90 100

نجد أن قيمة الوسيط

$$m = (70 + 80) \div 2 = 75\$$$

(ثانياً) حالة البيانات المبوبة: نتبع الخطوات التالية:

1. نحدد ترتيب الوسيط والذي يحسب من العلاقة: $c_1 = \frac{\sum f}{2}$
2. نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد.
3. نحدد فئة الوسيط؛ بالبحث عن الفئتين التي تتراوح قيمة c_1 بين ت. م. ص. الخاص بهما، ثم أختيار الفئة ذات أكبر ت. م. ص. بينهما.
4. نستخدم العلاقة التالية:

$$m = L + \frac{c_1 - c_2}{c_3} \times h$$

حيث:

L : الحد الأدنى لفئة الوسيط

c_1: ترتيب الوسيط

c_2: ت. م. ص السابق لفئة الوسيط

c_3: التكرار الأصلي لفئة الوسيط

h : طول الفئة

مثال (2.4): احسب وسيط أجور العمال اليومية (مثال 1.3).

الحل:

الأجور	عدد العمال	أقل من الحد الأعلى للفئة	ت. م. ص.
10 -	3	أقل من 20	3
20 -	6	أقل من 30	9
30 -	10	أقل من 40	$c_2 = 19$
$L = 40$ -	$c_3 = 15$	أقل من 50	34
50 -	8	أقل من 60	42
60 -	5	أقل من 70	47
70 - 80	3	أقل من 80	50

$c_1 = 25$

$$m = L + \frac{c_1 - c_2}{c_3} \times h = 40 + \frac{25-19}{15} \times 10 = \boxed{44}$$ ريال

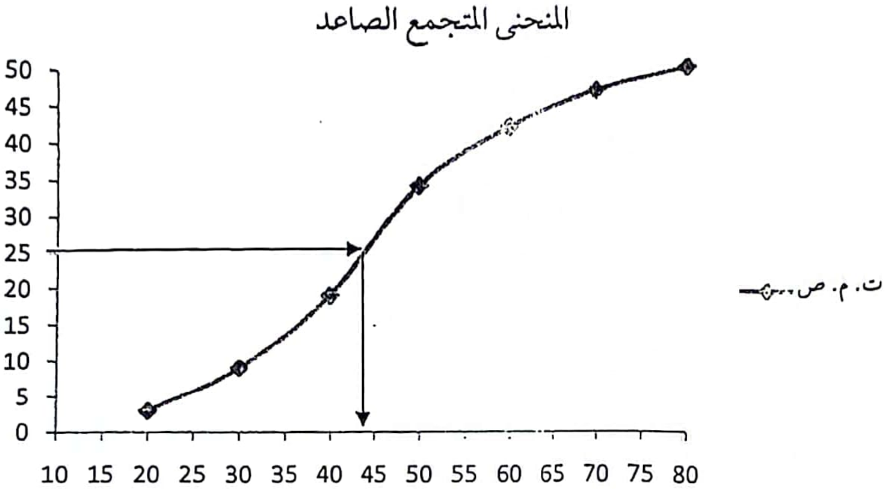
(ثالثاً) حالة البيانات المبوبة (طريقة الرسم): نتبع الخطوات التالية:

1. نحدد ترتيب الوسيط والتي تحسب من العلاقة: $c_1 = \frac{\sum f}{2}$
2. نرسم خط أفقي حتى يمس المنحنى المتجمع الصاعد ثم نسقط عمود على المحور الأفقي لنحصل على الوسيط مباشرة.

ملاحظة: قيمة الوسيط بالرسم قد تختلف قليلا عن قيمته بالحسابات، والمهم هو ألا تخرج قيمة الوسيط عن فئة الوسيط، أي لا تقل عن الحد الأدنى لفئة الوسيط ولا تزيد عن الحد الأعلى لها وفي مثالنا نجد أن قيمة الوسيط تنحصر بين 40 و50.

مثال (2.5): احسب وسيط أجور العمال اليومية (مثال 1.3) بالرسم.

الحل: نعلم أن $c_1 = 25$، ومن الشكل التالي نجد أن $m \approx 44$.



2.1.3. المنوال

تعريف: هو قيمة المفردة التي تتكرر أكثر من غيرها، أو هو المفردة ذات القيمة الأكثر شيوعا أو تكراراً، ويرمز له بالرمز (D).

> ملاحظة: المنوال يمكن استخدامه كذلك في حالة البيانات الوصفية (الغير مبوبة فقط).

طرق حسابه:

(أولاً) حالة البيانات الغير مبوبة: باستخدام التعريف مباشرة.

مثال (2.6): احسب الأجر الشائع لعينتي العاملين بإحدى القطاعات التاليتين:

العينة (1): 50 70 50 90 60

العينة (2): 50 70 70 50 60 70

الحل:

العينة (1): من تعريف المنوال، نجد أن $D = 50$

العينة (2): من تعريف المنوال، نجد أن $D = 70$

(ثانياً) حالة البيانات المبوبة: نتبع الخطوات التالية:

1. نحدد فئة المنوال؛ وهي الفئة ذات أكبر تكرار.
2. نستخدم العلاقة التالية:

$$D = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h$$

L : الحد الأدنى لفئة المنوال

Δ_1 : الفرق بين أكبر تكرار والسابق له

Δ_2 : الفرق بين اكبر تكرار واللاحق له

h : طول الفئة

مثال (2.7): احسب أجر العمال الشائع (مثال 1.3).

الحل:

الأجور (c)	عدد العمال (f)
10 -	3
20 -	6
30 -	**10**
L= 40 -	**15**
50 -	**8**
60 -	5
70 - 80	3

$$D = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h = 40 + \frac{(15-10)}{(15-10)+(15-8)} \times 10 = 40 + \frac{5}{5+7} \times 10 = \boxed{44.17}$$ ريال

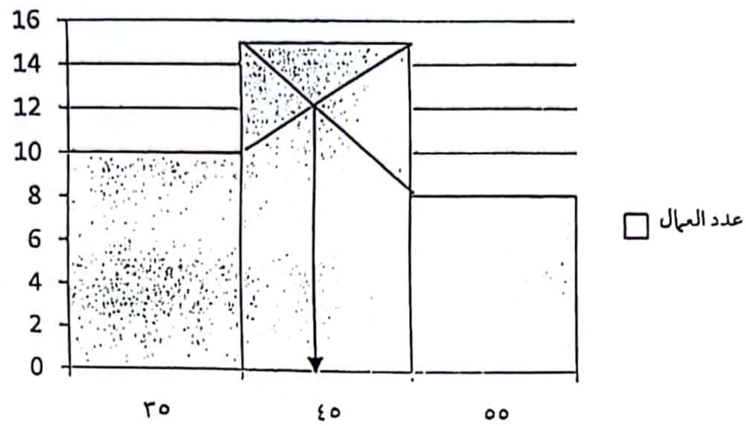
(ثالثاً) حالة البيانات المبوبة (طريقة الرسم): نتبع الخطوات التالية:

1. نرسم جزء من المدرج التكراري؛ مستطيل يمثل فئة المنوال (الفئة التي تقابل أكبر تكرار) ومستطيل يمثل الفئة السابقة وآخر يمثل الفئة اللاحقة لها.

2. نصل رؤوس المستطيلات ببعضها فتتقابل في نقطة نسقط منها عمود على المحور الأفقي، فتكون هي قيمة المنوال.

مثال (2.8): احسب الأجر الشائع للعمال (مثال 1.3) بالرسم.

الحل: $D \approx 44$



2.1.4. ملاحظات هامة على المتوسطات

1. درسنا الوسط الحسابي والوسيط والمنوال . نجد أن الوسط الحسابي أدق المتوسطات الثلاثة لأنه يأخذ في الاعتبار جميع فئات التوزيع، يليه الوسيط، وأخيرا المنوال لأن طرق حسابه تقريبية، وعلى ذلك إذا ذكر لفظ المتوسط دون تحديد فيقصد به الوسط الحسابي.
2. ذكر لفظ "الشائع"، مثل الطول الشائع ، العمر الشائع ......الخ، يقصد به المنوال.
3. عادة ما تكون قيم المتوسطات قريبة من بعضها البعض.

2.2. مقاييس التشتت

التشتت: يقصد بالتشتت دراسة مدى تقارب أو تباعد البيانات عن بعضها البعض أي عن وسطها الحسابي. فكلما كانت البيانات قريبة من بعضها البعض أي قريبة من الوسط الحسابي تكون البيانات متجانسة، والعكس كلما كانت البيانات بعيدة عن بعضها أي بعيدة عن الوسط الحسابي تكون البيانات متباعدة أو مشتتة.

يقاس التشتت بعدة مقاييس، منها: المدى[1]، الانحراف المتوسط، الانحراف المعياري، الانحراف الربيعي (نصف المدى الربيعي)، معامل الاختلاف. وسنكتفي بالانحراف المعياري، ومعامل الاختلاف.

2.2.1. الانحراف المعياري

تعريفه: هو أدق مقاييس التشتت وأكثرها استخداما، ويعرف بأنه الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات (فروق) القيم عن وسطها الحسابي، ويرمز له بالرمز (s_x).

ملاحظات هامة
1. متوسط مربعات انحرافات (فروق) القيم عن وسطها الحسابي يسمى التباين، أي أن الانحراف المعياري هو جذر التباين.
2. قيمة التباين لا بد أن تكون موجبة أو تساوي الصفر.
3. كلما اقتربت قيمة التباين من الصفر، أي كلما اقتربت قيمة الانحراف المعياري من الصفر كلما أصبحت البيانات قريبة من التجانس.
4. يتأثر الانحراف المعياري بالقيم الشاذة.

طرق حسابه:

(أولاً) حالة البيانات الغير مبوبة: نستخدم القانون التالي:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

حيث: $\sum x^2$: مجموع مربعات قيم مفردات العينة n : حجم العينة

مثال (2.9): احسب الانحراف المعياري للأجور اليومية بالدولار للعينة التالية المكونة من خمس عمال بإحدى القطاعات: **50   70   80   90   60**

الحل:

$$\bar{x} = \frac{350}{5} = \boxed{70\$}$$

$$\frac{\sum x^2}{n} = \frac{60^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2 + 50^2}{5} = 5100$$

[1] سبق ذكره في الباب الأول.

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{5100 - 4900} = \sqrt{200} = \boxed{14.14\$}$$

(ثانياً) حالة البيانات المبوبة: نتبع الخطوات التالية:

1. نتبع خطوات حساب المتوسط الحسابي.
2. نضيف عمود جديد هو حاصل ضرب عمود مركز الفئة (عمود 3) في عمود حاصل ضرب عمود التكرارات في عمود مركز الفئة (عمود 4).
3. نستخدم القانون التالي:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum f \cdot x^2}{\sum f} - \bar{x}^2}$$

مثال (**2.10**): اوجد الانحراف المعياري لأجور العمال (مثال **1.3**).

الحل: من مثال (2.2) نعلم أن:

$$\bar{x} = \frac{\sum f \cdot x}{\sum f} = \frac{2210}{50} = \boxed{44.2}$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = (3) × (4)
الأجور (c)	عدد العمال (f)	x مركز الفئة	$f \cdot x$	$f \cdot x^2$
10 -	3	15	45	675
20 -	6	25	150	3750
30 -	10	35	350	12250
40 -	15	45	675	30375
50 -	8	55	440	24200
60 -	5	65	325	21125
70 - 80	3	75	225	16875
$\sum$	**50** $=\sum f$		**2210** $=\sum f \cdot x$	**109250** $=\sum f \cdot x^2$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum f \cdot x^2}{\sum f} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{109250}{50} - 44.2^2} = \sqrt{2185 - 1953.64} = \sqrt{231.36} = \boxed{15.21} \text{ ريال}$$

2.2.2. معامل الاختلاف

لمقارنة تشتت مجموعتين أو أكثر من البيانات ، فإننا لا نستخدم مقاييس التشتت السابق ذكرها مباشرة ، وذلك بسبب:

- قد تكون البيانات ذات وحدات قياس مختلفة.
- قد تكون الأوساط الحسابية للظاهرتين مختلفة، لذلك نستخدم ما يسمى بمقاييس التشتت النسبي، وأهم هذه المقاييس هو ما يعرف بمعامل الاختلاف.

تعريف معامل الاختلاف: هو معامل نسبي يستخدم للمقارنة بين تشتت ظاهرتين أو أكثر مختلفتين أو حتى متشابهتين في وحدة القياس. والظاهرة التي معامل اختلافها أكبر تكون أكثر تشتتاً من الأخرى. ويستخدم في حسابه العلاقة الآتية:

$$cv.(x)=\frac{s_x}{\bar{x}}\times 100$$

مثال (**2.11**): اوجد معامل الاختلاف لأجور العمال (مثال **1.3**).

الحل: من مثال (2.2) و(2.10) نعلم أن:

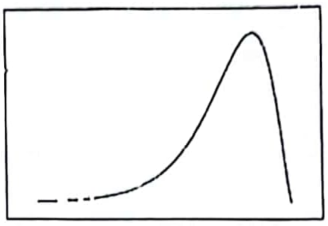
$$\bar{x}=44.2$$
$$s_x=15.21$$
$$cv.(x)=\frac{s_x}{\bar{x}}\times 100=\frac{15.21}{44.2}\times 100=34.41\%$$

2.3. الالتواء

الالتواء: هو بعد المنحنى التكراري عن التماثل. ويقصد بالتماثل أنه إذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى التكراري وقسمه إلى قسمين منطبقين يكون التوزيع متماثلاً. والعكس فيكون التوزيع غير متماثل أي ملتو إما إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار.

ويقاس الالتواء بعدة مقاييس، منها:

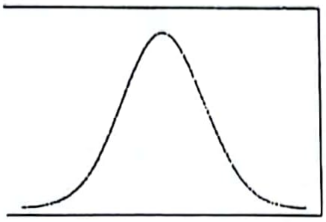
$$s.k.(I)=\frac{\bar{x}-D}{s_x} \qquad s.k.(II)=\frac{3(\bar{x}-m)}{s_x}$$



التوزيع غير متماثل

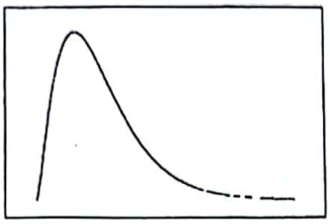
وملتو من جهة اليسار

$\bar{x} \neq m \neq D$



التوزيع متماثل

$\bar{x} = m = D$



التوزيع غير متماثل

وملتو من جهة اليمين

$\bar{x} \neq m \neq D$

ودلالة قيمة أي من المعاملين على النحو التالي:

$$s.k. \begin{cases} < 0 \quad (-) & \text{التوزيع ملتو لليسار} \\ = 0 & \text{التوزيع متماثل} \\ > 0 \quad (+) & \text{التوزيع ملتو لليمين} \end{cases}$$

مثال (2.12): ادرس التواء التوزيع التكراري لأجور العمال (**مثال 1.3**)، باستخدام:

الحل:

$$s.k.(I) = \frac{\bar{x} - D}{s_x} = \frac{44.2 - 44.17}{15.21} = 0.002$$

$$s.k.(II) = \frac{3(\bar{x} - m)}{s_x} = \frac{3(44.2 - 44)}{15.21} = 0.04$$

ملاحظات:

1. عادة ما نحصل على نتائج مختلفة لمعاملي الالتواء، وهذا لا يناقض بعضه إذ أن كل معامل يقيس الالتواء على أساس يخالف المعاملات الأخرى.
2. عند مقارنة التواء توزيعات مختلفة يجب استخدام نفس المعامل عند المقارنة.

2.4. مسائل محلولة

2.4.1. الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري لفئات الدخل الشهري لعينة من الأسر (مئات الريالات) بإحدى المدن:

فئات الدخل	62 -	66 -	70 -	74 -	78 -	82 -	86 - 90
عدد الأسر	3	8	20	21	14	10	4

المطلوب:

1. حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.
2. حساب الوسيط والمنوال.
3. دراسة إلتواء التوزيع التكراري.

الحل:

فئات الدخل	عدد الأسر	x	fx	fx^2
62 -	3	64	192	12288
66 -	8	68	544	36992
70 -	20	72	1440	103680
74 -	21	76	1596	121296
78 -	14	80	1120	89600
82 -	10	84	840	70560
86 - 90	4	88	352	30976
$\sum$	**80**		**6084**	**465392**

1.

$$\bar{x} = \frac{\sum f \cdot x}{\sum f} = \frac{6084}{80} = \boxed{76.05} \quad \text{مئات الريالات}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum f \cdot x^2}{\sum f} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{465392}{80} - 76.05^2} = \sqrt{33.8} = \boxed{5.8} \quad \text{مئات الريالات}$$

2.

ت. م. ص.	أقل من الحد الأعلى للفئة	عدد الأسر	فئات الدخل
3	أقل من 66	3	62 -
11	أقل من 70	8	66 -
31	أقل من 74	**20**	70 -
52	أقل من 78	**21**	74 -
66	أقل من 82	**14**	78 -
76	أقل من 86	10	82 -
80	أقل من 90	4	86 - 90
		80	$\sum$

$$m = L + \frac{c_1 - c_2}{c_3} \times h = 74 + \frac{40-31}{21} \times 4 = \boxed{75.71}$$ مئات الريالات

$$D = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h = 74 + \frac{1}{1+7} \times 4 = 74 + \frac{1}{8} \times 4 = \boxed{74.5}$$ مئات الريالات

3. نستخدم المنوال لدراسة الالتواء:

$$s.k.(I) = \frac{\bar{x} - D}{s_x} = \frac{76.05 - 74.5}{5.8} = 0.27$$

التوزيع غير متماثل وملتو لليمين.

2.4.2. إذا كانت y تمثل الاستهلاك الأسبوعي الشخصي بالريال، x تمثل الاستهلاك الأسبوعي لوقود السيارات (باللتر)، استخدم المعلومات التالية لتحديد أي الظاهرتين أكثر تشتتاً.

$s_y = 15$ ريال ، $\bar{y} = 75$ ريال

- التوزيع التكراري للاستهلاك الأسبوعي لوقود السيارات:

فئات الاستهلاك	18 -	28 -	38 -	48 -	58 -
عدد المستهلكين	26	59	105	79	31

الحل: نقوم بحساب معامل الاختلاف للمتغير (أو الظاهرة) x ومن ثم نحسب معامل الاختلاف للمتغير (أو الظاهرة) y ثم نقارن بينهما.

فئات الاستهلاك	عدد السيارات	x	fx	fx^2
18 -	26	23	598	13754
28 -	59	33	1947	64251
38 -	105	43	4515	194145
48 -	79	53	4187	221911
58 - 68	31	63	1953	123039
$\sum$	**300**		**13200**	**617100**

$$\bar{x} = \frac{\sum f \cdot x}{\sum f} = \frac{13200}{300} = \boxed{44}$$ لتر

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum f \cdot x^2}{\sum f} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{617100}{300} - 44^2} = \sqrt{121} = \boxed{11}$$ لتر

$$\therefore c.v.(x) = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{11}{44} \times 100 = 25\%$$

كما أن:

$$\therefore c.v.(x) = \frac{s_y}{\bar{y}} \times 100 = \frac{15}{75} \times 100 = 20\%$$

لذا يمكن القول أن ظاهرة الاستهلاك الأسبوعي لوقود السيارات أكثر تشتتاً من ظاهرة الاستهلاك الأسبوعي الشخصي.

2.5. تمارين

2.5.1. الجدول الآتي يوضح توزيع عينة من (100) موظف حسب فئات الزيادة التي حصلوا عليها في الراتب (بعشرات الريالات):

فئات الزيادة	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -	90 -
عدد الموظفين	4	11	20	36	17	8	4

1. ارسم المدرج التكراري للتوزيع، ثم حدد منه قيمة المنوال.
2. ارسم المنحنى المتجمع الصاعد ومن الرسم أوجد:

أ. عدد الموظفين الذين حصلوا على الزيادة أقل من 750 ريال.

ب. الحد الأعلى الزيادة التي حصل عليها 30 موظف.

ج. وسيط الزيادة في الراتب.

2.5.2. الجدول الآتي يوضح توزيع عينة من (200) موظف بإحدى الوزارات حسب أعمارهم بالسنة.

فئات العمر	20 -	25 -	30 -	35 -	40 -	45 -	50 -	55 -
عدد الموظفين	10	17	24	43	34	30	23	19

1. احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري. $\Delta_1 = 43 - 24$
2. ارسم المنحنى المجتمع الصاعد ومن الرسم أوجد: $\Delta_2 = 43 - 34$

أ. نسبة عدد المشتغلين الذين يقل عمرهم عن 42 سنه.

ب. الحد الأعلى للعمر الذي بلغه 120 موظف.

ج. وسيط العمر.

3. ارسم المنحنى التكراري، هل المنحنى متماثل؟ دلل على إجابتك بحساب معامل الالتواء.

2.5.3. الجدول الآتي يوضح توزيع عينة من الموظفين بإحدى شركات القطاع الخاص حسب فئات الراتب (آلاف الريالات).

فئات الراتب	62 -	66 -	70 -	74 -	78 -	82 -	86 -
عدد الموظفين	3	8	20	21	14	10	4

1. احسب كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري.
2. الوسيط (بالحساب و بالرسم).
3. المنوال (بالحساب و بالرسم).
4. معامل الاختلاف.
5. معاملي الالتواء.

2.5.4. الجدول الآتي يوضح توزيع الدخل السنوي (بآلاف الريالات) لعينة من الأسر بإحدى المدن:

فئات الدخل	40-	48-	56-	64-	72-	80-	88-
عدد الأسر	8	16	24	36	30	18	8

1. الانحراف المعياري للتوزيع.
2. الوسيط.
3. الدخل الشائع لهذه الأسر.
4. معامل الاختلاف.
5. هل هذا التوزيع متماثل؟ علل إجابتك.

2.5.5. الجدول الآتي يوضح توزيع عينة من (500) موظف حسب الساعات الإضافية التي حققها أسبوعياً بإحدى الشركات:

الساعات الإضافية	2 -	3 -	4 -	5 -	6 -	7 -	8 -	9 -
عدد الموظفين	98	118	101	95	50	20	10	8

احسب المتوسط والتباين لعدد الساعات الإضافية، ثم احسب معامل الاختلاف.

2.5.6. البيانات التالية تمثل أسعار منتجات معينة (بالريال) مختارة من ثلاثة مراكز تجارية مختلفة:

عينة (1):	7	2	1	3	6	5
عينة (2):	8	4	2	1	3	6
عينة (3):	1	4	2	5	1	3

احسب معامل الاختلاف لكل عينة، أي العينات أكثر تشتتاً ؟

2.5.7. الجدول الآتي يوضح توزيع عينة من المرضى بمرض معين بإحدى المستشفيات حسب الساعات التي قضوها حتى تماثلوا للشفاء:

الساعات	15 -	19 -	23 -	27 -	31 -
عدد المرضى	6	14	42	10	8

1. ارسم المدرج و المضلع التكراري للتوزيع.
2. احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع.
3. أوجد منوال التوزيع.
4. احسب معامل الاختلاف.
5. هل هذا التوزيع متماثل؟ علل إجابتك.

2.5.8. الجدول الآتي يوضح توزيع أسعار عينة من العقارات بمدينة جدة حسب سعرها (بمئات الآلاف ريال)

فئات الأسعار	15 -	17 -	19 -	21 -	23 -
عدد العقارات	3	7	21	5	4

1. احسب الانحراف المعياري للتوزيع.
2. احسب وسيط التوزيع، واستخدمه في دراسة تماثل التوزيع.

إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمساحة نفس العقارات هو 600، 150 (متر مربع) على التوالي. فأيهما أكثر تشتتاً؟ السعر أم المساحة.