

Operation Research

مدخل في بحوث العمليات: Operation Research

المقدمة :

تعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي احرزت نجاحاً واسعاً في المجالات العسكرية والمدنية , وتمتد الجذور التاريخية لهذا الحقل من حقول المعرفة المتخصصة الى اوائل الحرب العالمية الثانية عندما واجهت القوات البريطانية العديد من المشاكل مما ادى بها الى استخدام اساليب بحوث العمليات لحل العديد من المشاكل التي تواجه الادارة في العمليات الحربية وفي عمليات ادارة الاعمال والادارة الحكومية وذلك لتحقيق الاستخدام الامثل للموارد البشرية .

وبعدها اتسعت رقعة تطبيق OR خلال عام 1941 نفسه لتشمل قوات الحلفاء وذلك بسبب النجاح الكبير الذي احرزته القوات البريطانية في حل المعضلات الحربية . لذلك قامت القوات الامريكية بتكوين لجنة مماثلة بهدف معالجة مشكلة نقل المعدات والمون والذخائر الحربية ومعالجة مشاكل ايجاد انماط جديدة للطيران الحربي وتخطيط عملية زرع الالغام وغيرها.

تعريف بحوث العمليات : Operation Research : OR

يدور موضوع بحوث العمليات حول استخدام اساليب التحليل الكمي لمساعدة الادارة في اتخاذ القرارات حول المشاكل التي تواجهها مع الاعتماد بالدرجة الاولى على الاساليب الرياضية المتقدمة . عند ادارة أنظمة كبيرة مع القوى العاملة , المعدات , المواد الاولية , الاموال في المصانع والمؤسسات الحكومية والقوات المسلحة.

وبعبارة اخرى يمكن تعريف بحوث العمليات " بأنها طريقة علمية تجهز الادارة بقرارات كمية , حول المشاكل التي تجابهها .

خطوات دراسة بحوث العمليات :

يتضمن اسلوب بحوث العمليات خمسة خطوات اساسية وهي على الترتيب:

1. تعريف المشكلة قيد الدرس.
2. صياغة النموذج الملائم للمشكلة.
3. حل النموذج .
4. اختبار النموذج والحل الناتج منه.
5. وضع الحل موضع التطبيق العملي.

1. تعريف المشكلة:

يتم تعريف المشكلة وذلك بتحديد كل من الهدف والبدائل والقيود, بالنسبة للهدف قد يتمثل في زيادة الارباح او زيادة الطاقة الانتاجية او تقليل التكاليف.

2. بناء النموذج :

ان عمل النموذج هو عملية تمثيل المكونات, المشكلة والعوامل المؤثرة والظروف المحيطة بها بشكل او بصيغة تساعد على فهمها وكلمة النموذج تعني عرض مبسط للواقع بشكل او بصيغة تساعدنا من التوصل الى قرار سليم. وهناك انواع من النماذج منها الرياضية والفيزيائية والتنظيمية.

3. حل النموذج :

بعد صياغة النموذج الملائم للمسألة تأتي المرحلة التالية والمتمثلة بحل النموذج لاستخراج مجموعة قيم المتغيرات, يتم الحل بتطبيق اساليب البرمجة الرياضية او البرامج الاحتمالية او شبكات الاعمال .

4. اختبار النموذج والحل المستخرج :

ان حل النموذج لا يعني نهاية المسألة , اذ يجب ان يختبر هذا الحل وذلك لإظهار قدرة النموذج في تمثيله للمسألة , يتم الاختبار باستخدام بيانات تاريخيه وقد يتطلب الامر تحويل النموذج واعادة اختباره الى ان تزول كافة النواقص الموجودة فيه.

5. وضع الحل موضع التطبيق العملي :

تأتي هذه الخطوة بعد التأكد من صلاحية النموذج وملائمته للبيانات وتتكون من ترجمة الحل وتحويله الى اساليب عمل ومراقبته وتقديمها الى الجهات المختصة بشكل واضح.

البرمجة الخطية: (LP) Linear programming

تعتبر البرمجة الخطية احدى نماذج البرمجة الرياضية التي تعالج مسألة تخصيص او توزيع للموارد او الطاقات المحدودة لتحقيق هدف معين ويعبر عن هذا الهدف بدالة خطية مستخدمة لوصف العلاقة بين متغيرين او اكثر وهذه العلاقة مباشرة وتتغير بنفس النسبة اي انه اذا تغيرت ساعات الانتاج بنسبة 10% يتغير الانتاج بنسبة 10% ايضاً.

تسمى هذه الدالة الخطية بدالة الهدف Objective Function فقد تكون دالة ربح او دالة كلفة او دالة انتاج وتخضع هذه الدالة الى قيود مفروضة عبارة عن معادلات او متباينات تسمى القيود Constraints تعبر عن المواد الاولية, ساعات العمل, طاقة المكنان, عدد عمال... الخ. وقيود عدم السلبية الذي يكون دائماً بشكل اكبر او يساوي .

وبهذا نستنتج ان نموذج البرمجة الخطية يتكون من ثلاث مكونات رئيسية هي :

1. دالة الهدف Objective Function وتكون اما تعظيم ارباح ترمز بالرمز Max او تقليل التكاليف ونرمز لها بالرمز Min

2. القيود Constraints وتكون بشكل اكبر او يساوي او مساواة او اقل او يساوي $\leq = \geq$

3. قيد عدم السلبية ويكون دائماً بشكل اكبر او يساوي اي بمعنى ان قيمته موجبة دائماً

وبهذا يمكننا من تعريف البرمجة الخطية بالتعريف التالي " وهي أسلوب رياضي يتم من خلاله تعظيم هدف (Objective) معين او تصغير هدف معين , طبقاً الى شروط خاصة تسمى القيود (Constraints) , وقبل ذلك لا بد من تعريف الصيغة العامة لنموذج (L.P) .

$$\text{Max or Min } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

Subject to:

$$x_2 + \dots + a_{1n} x_n (\leq = \geq) b_1 a_{11} x_1 + a_{12}$$

$$x_2 + \dots + a_{2n} x_n (\leq = \geq) b_2 a_{21} x_1 + a_{22}$$

.

.

.

$$x_2 + \dots + a_{mn} x_n (\leq = \geq) b_m a_{m1} x_1 + a_{m2}$$

$$\text{Were: } X_j \geq 0$$

$$b_j \geq 0$$

اما الصيغة الرياضية العامة لنموذج البرمجة الخطية L.P فهي كما يلي :

$$\text{Max or Min } Z_0 = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} X_j (\leq = \geq) b_j$$

$$X_j \geq 0$$

حيث ان :

i : تمثل عدد القيود

j : تمثل عدد المتغيرات

a_{ij} : المعاملات الفنية

امثلة عامة عن نماذج للبرمجة الخطية :

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 7X_2$$

s.to

$$2X_1 + 5X_2 \leq 10$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 15$$

$$5X_1 + 8X_2 \leq 64$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 25X_1 + 75X_2 + 15X_3$$

s.to

$$10X_1 + 15X_2 + 6X_3 \geq 40$$

$$16X_1 + 16X_2 + 4X_3 \geq 30$$

$$12X_1 + 8X_3 \geq 44$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

بناء أنموذج برمجة خطية (B L P): Building Linear programming

يتطلب حل المشكلة بأسلوب البرمجة الخطية ان تتوفر الشروط الاتية :

1-تحديد دالة الهدف Objective Function:

2.تحديد القيود Constraints:

3.شرط عدم السلبية Non Negative:

والامثلة التالية التي تبين كيفية بناء أنموذج برمجة خطية .

مثال 1/ شركة الوركاء للصناعات الخشبية تصنع رفوف الكتب ومكاتب , يتطلب كل رف 4 ساعة لأعمال النجارة و 2 ساعة لأعمال الطلاء , ويتطلب كل مكتب 2 ساعة لأعمال النجارة , و 4 ساعة لأعمال الطلاء. وتمتلك الشركة بحد أقصى 60 ساعة من اعمال النجارة و 48 ساعة من اعمال الطلاء متاحة في كل اسبوع , وانها تحقق ارباحاً قدرها 8 \$ لكل رف و 6 \$ لكل مكتب . وكما مبين في الجدول ادناه:

الوقت المتاح	المكاتب	رفوف الكتب
60	2	4
48	4	2
	6	8
		الربح

المطلوب : استخدم البرمجة الخطية لإيجاد عدد الرفوف وعدد المكاتب المطلوب ان تصنع ؟

الحل: نفرض ان X_1 تمثل رفوف الكتب

X_2 تمثل المكاتب

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 6X_2$$

s.to

$$4X_1 + 2X_2 \leq 60$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 48$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال 2/ تقوم إحدى مصانع التجارة لنجارة الخشب بإنتاج الكراسي والمناضد وكل نوع من هذه المنتجات يحتاج إلى مواد أولية وان كلفة كل منتج تختلف عن الآخر , وكما مبين في الجدول التالي :

المطلوب : بناء أنموذج رياضي لإنتاج هذا المصنع أو تحديد البرنامج الأمثل للإنتاج بحيث تكون التكاليف اقل ما يمكن ؟

نوع المواد الأولية	الكراسي	المناضد	الاحتياجات الأسبوعية
A	2	3	20
B	1	2	25
ساعات العمل	5	3	60
كلفة الوحدة الواحد	40\$	30\$	

الحل:

أولاً: نفرض عدد الوحدات المنتجة من الكراسي هو X_1

و نفرض عدد الوحدات المنتجة من المناضد هو X_2

ثانياً: نبدأ ببناء نموذج البرمجة الخطية للمصنع, علماً ان نموذج البرمجة الخطية يتكون من ثلاث مكونات رئيسية وهي دالة الهدف والقيود وقيود عدم السلبية .

$$\text{Min } z = 40X_1 + 30X_2$$

s.to

$$2X_1 + 3X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 25$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال 3/ مصنع ينتج منتجين يستدعي ورود كل منتج إلى ثلاث أقسام إنتاجية على التوالي لغرض صناعتها, الوقت المتاح في كل قسم إنتاجي لها والربح مبين في الجدول أدناه :

نوع المنتج	القسم الإنتاجي الأول	القسم الإنتاجي الثاني	القسم الإنتاجي الثالث	الربح
A	20	16	5.5	80
B	15	16	28	75
الساعات المتاحة للعمل	40	35	61	

المطلوب : بناء أنموذج رياضي لإنتاج هذا المصنع أو تحديد البرنامج الأمثل للإنتاج , أو احسب كمية الإنتاج الممكنة من كل سلعة بحيث تحقق أعلى ربح ممكن ؟

الحل: أولاً: نفرض ان

X_1 كمية الانتاج من السلعة الاولى

X_2 كمية الانتاج من السلعة الثانية

ثانياً: نبدأ ببناء نموذج البرمجة الخطية للمصنع.

$$\text{Max } Z = 80X_1 + 75X_2$$

s.to

$$20X_1 + 15X_2 \leq 40$$

$$16X_1 + 16X_2 \leq 35$$

$$5.5X_1 + 28X_2 \leq 61$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال 4/ سالي مزارعة تمتلك مساحة 45 هكتار من الارض وتريد ان تزرع اما حنطة او ذرة في كل هكتار , اذا زرعت حنطة تربح \$200 وكل هكتار من الذرة تربح \$300 , وان ما متاح من المواد هو 100 عامل و110 طن من السماد وكما مبين في الجدول ادناه:

المورد المتاح	الحنطة	الذرة
العمال	3 عمال	2 عمال
السماد	2 طن	4 طن

المطلوب : استخدام البرمجة الخطية لتحديد كيف ان سالي تستطيع تعظيم الربحية على ارضها؟

الحل: اولاً: نفرض ان

X1 تمثل كمية ربح الحنطة

X2 تمثل كمية ربح الذرة

ثانياً: نبدأ ببناء نموذج البرمجة الخطية

$$\text{Max } Z = 200X_1 + 300X_2$$

s.to

$$3X_1 + 2X_2 \leq 100$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 110$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال 5/ مصنع ينتج نوعين من المنتجات (P1,P2) باستخدام ثلاث انواع من الماكائن (M1,M2,M3) وان انتاج المنتج P1 يمر من خلال الماكنتين M1,M2 وانتاج المنتج P2 يجب ان يمر من خلال الماكائن الثلاثة والجدول الاتي يمثل الوقت الذي يستغرقه في انتاج وحدة واحدة من كل منتج في الساعة وكما مبين في الجدول ادناه:

	M1	M2	M3
P1	0.25	0.4	0
P2	0.5	0.2	0.8

وان كل ماكينة من الماكائن يجب ان تعمل على الاكثر 40 ساعة اسبوعياً, فإذا علمت ان المصنع يحصل على ربح مقداره 2 \$ لكل وحدة منتجة من المنتج P1 و3\$ لكل وحدة منتجة من المنتج P2.

المطلوب :

صياغة البرمجة الخطية وحساب الوحدات الواجب انتاجها من كل منتج في الاسبوع لتعظيم ربح المصنع ؟

الحل: اولاً: نفرض ان

X_1 عدد الوحدات المنتجة من المنتج الاول

X_2 عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني

ثانياً: نبدأ ببناء نموذج البرمجة الخطية

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$$

s.to

$$0.25X_1 + 0.5X_2 \leq 40$$

$$0.4X_1 + 0.2X_2 \leq 40$$

$$0.8X_2 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال 6 واجب بيتي / شركة كلكامش للصناعات الالكترونية تقوم بأنتاج المنتجات (الهواتف النقالة , واجهزة لوحية, وحواسيب محمولة) وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب انتاجها من كل منتج بحيث تحصل على اكبر ربح ممكن ويتطلب انتاج الوحدة الواحدة من كل منتج من المنتجات الثلاثة المرور بثلاثة مراحل انتاجية هي (A) مرحلة التصنيع و (B) مرحلة التجميع و (C) مرحلة التغليف , الوقت المتاح بالدقائق في كل قسم إنتاجي للمنتجات وكذلك الربح المتوقع مبين في الجدول أدناه :

الوقت المتاح	وحوا سيب محمولة	اجهزة لوحية	الهواتف النقالة	المراحل الانتاجية
360	0	2	3	(A) مرحلة التصنيع
355	5	0	4	(B) مرحلة التجميع
340	3	5	3	(C) مرحلة التغليف
	8	4	6	الربح

المطلوب : بناء أنموذج رياضي لانتاج المصنع أو تحديد البرنامج الأمثل للانتاج بحيث تحقق أعلى ربح ممكن باستخدام نموذج البرمجة الخطية ؟

مثال 7 واجب بيتي / ساره مزارعة تمتلك مساحة 55 هكتار من الارض وتريد ان تزرع اما حنطة او ذرة في كل هكتار , تخوان ما متاح من المواد هو 90 عامل و111 طن من السماد , وكلفة كل منتج تختلف عن الاخر وكما مبين في الجدول ادناه:

المورد المتاح	الحنطة	الذرة
العمال	7 عمال	5 عمال
السماد	2 طن	7 طن
\$40	\$88	كلفة المنتجات

المطلوب : استخدام البرمجة الخطية لتحديد البرنامج الامثل للانتاج بحيث تكون التكاليف اقل مايمكن؟

صيغ البرمجة الخطية

1.الصيغة القانونية Canonical Form:

ومن شروط أو خصائص هذه الصيغة هي :

1-دالة الهدف يجب ان تكون من نوع Max

2-جميع القيود يجب ان تكون من نوع اقل أو يساوي إي (≤)

3-جميع المتغيرات تكون مقيدة بأشارة اي ان:

$$X_j \geq 0$$

Example 1 : Write the following (L.P.P) in **Canonical form ?**

حول او اكتب نموذج البرمجة الخطية الى الصيغة القانونية ؟

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2 + 6X_3$$

s.to

$$6X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 40$$

$$8X_1 - 3X_2 + 2X_3 \geq -60$$

$$|X_1 - 3X_2| \leq 70$$

$$2X_1 + X_3 \leq 63$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

$$\text{Max } Z = -2X_1 - 3X_2 - 6X_3$$

sto :

$$6X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 40$$

$$-8X_1 + 3X_2 - 2X_3 \leq 60$$

$$X_1 - 3X_2 \leq 70$$

$$-X_1 + 3X_2 \leq 70$$

$$2X_1 + X_3 \leq 63$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Example 2 : Write the following (L.P.P) in **Canonical form ?**

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 7X_2$$

s.to

$$3X_1 + 6X_2 \geq -6$$

$$6X_1 - 2X_2 = 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 7X_2$$

s.to

$$-3X_1 - 6X_2 \leq 6$$

$$6X_1 - 2X_2 \leq 4$$

$$6X_1 - 2X_2 \geq 4$$

$$-6X_1 + 2X_2 \leq -4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Example 3 : Write the following (L.P.P) in Canonical form ?

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 4X_2 + 8X_3$$

s.to

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 8$$

$$5X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 6$$

$$|X_1 - X_2| \leq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

$$\text{Max } Z = -2X_1 - 4X_2 - 8X_3$$

s.to

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 8$$

$$-5X_1 - 2X_2 - 2X_3 \leq -6$$

$$X_1 - X_2 \leq 10$$

$$-X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Example 4 : Write the following (L.P.P) in Canonical form ?

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 7X_2 + 10X_3 + 4X_4$$

s.to

$$6X_1 - 2X_2 - X_3 + 5X_4 \geq -15$$

$$2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 6$$

$$4X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 20$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Solution:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 7X_2 + 10X_3 + 4X_4$$

s.to

$$-6X_1 + 2X_2 + X_3 - 5X_4 \leq 15$$

$$2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 6$$

$$4X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 20$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Example 5 Home work: Write the following (L.P.P) in Canonical form?

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 22X_2 + 17X_3$$

s.to

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 \geq 15$$

$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 14$$

$$| 8X_1 + 5X_2 + 4X_3 | \leq 19$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Example 6 Home work: Write the following (L.P.P) in Canonical form?

$$\text{Max } Z = 12X_1 + 25X_2 + 19X_3$$

s.to

$$5X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 18$$

$$X_1 - 4X_2 + 3X_3 \leq 14$$

$$6X_1 - 2X_3 \geq 22$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

2. الصيغة القياسية Standard Form :

ومن شروط او خصائص هذه الصيغة هي :

- 1-دالة الهدف تكون من نوع Max او من نوع Min
- 2-جميع القيود يجب ان تكون من نوع مساواة اي (=)
- 3-قيم الطرف الايمن يجب ان تكون موجبة
- 4-جميع المتغيرات تكون مقيدة بأشارة اي ان:

$$X_j \geq 0$$

Example 1 : Write the following (L.P.P) in Standard form ?

$$\text{Min } Z = 3X_1 + X_2 - X_3$$

s.to

$$2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \leq 9$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq -18$$

$$3X_1 + 2X_2 - 5X_3 = 15$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + X_2 - X_3$$



s.to

$$2X_1 + 4X_2 + 8X_3 + S_1 = 9$$

$$-5X_1 - 3X_2 \leq 18$$

$$-5X_1 - 3X_2 + S_2 = 18$$

$$3X_1 + 2X_2 - 5X_3 = 15$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

Example 2 : Write the following (L.P.P) in standard form ?

$$\text{Max } Z = 14X_1 + 7X_2 + 10X_3$$

s.to

$$3X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq -9$$

$$X_1 + 4X_2 \geq 10$$

$$4X_1 + 4X_2 = 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

$$\text{Max } Z = 14X_1 + 7X_2 + 10X_3$$

s.to

$$3X_1 + 2X_2 + 3X_3 + S_1 = -9$$

$$-3X_1 - 2X_2 - 3X_3 - S_1 = 9$$

$$X_1 + 4X_2 - S_2 = 10$$

$$4X_1 + 4X_2 = 20$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

Example 3 : Write the following (L.P.P) in standard form ?

$$\text{Min } Z = 10X_1 + 2X_2 + X_3$$

s.to

$$X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 10$$

$$X_1 + 10X_2 \leq 30$$

$$3X_1 + X_2 + X_3 \geq -20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

$$\text{Min } Z = 10X_1 + 2X_2 + X_3$$

s.to

$$X_1 + X_2 + 2X_3 - S_1 = 10$$

$$X_1 + 10X_2 + S_2 = 30$$

$$3X_1 + X_2 + X_3 - S_3 = -20$$

$$-3X_1 - X_2 - X_3 + S_3 = 20$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Example 4 : Write the following (L.P.P) in standard form ?

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 22X_2 + 14X_3$$

s.to

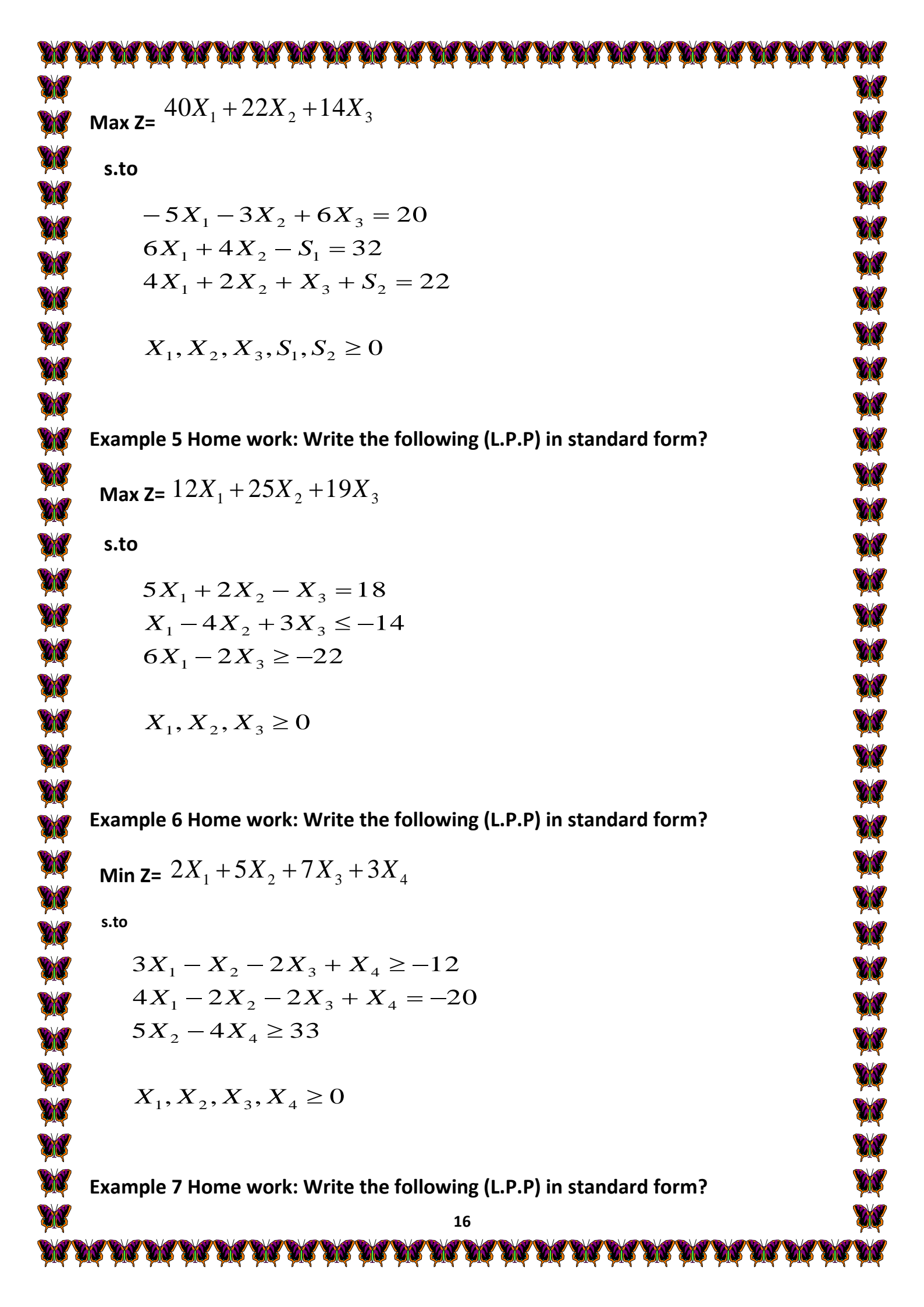
$$5X_1 + 3X_2 - 6X_3 = -20$$

$$6X_1 + 4X_2 \geq 32$$

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 22$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:


$$\text{Max } Z = 40X_1 + 22X_2 + 14X_3$$

s.to

$$-5X_1 - 3X_2 + 6X_3 = 20$$

$$6X_1 + 4X_2 - S_1 = 32$$

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 + S_2 = 22$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

Example 5 Home work: Write the following (L.P.P) in standard form?

$$\text{Max } Z = 12X_1 + 25X_2 + 19X_3$$

s.to

$$5X_1 + 2X_2 - X_3 = 18$$

$$X_1 - 4X_2 + 3X_3 \leq -14$$

$$6X_1 - 2X_3 \geq -22$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Example 6 Home work: Write the following (L.P.P) in standard form?

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 5X_2 + 7X_3 + 3X_4$$

s.to

$$3X_1 - X_2 - 2X_3 + X_4 \geq -12$$

$$4X_1 - 2X_2 - 2X_3 + X_4 = -20$$

$$5X_2 - 4X_4 \geq 33$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Example 7 Home work: Write the following (L.P.P) in standard form?

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 2X_2 + 9X_3$$

s.to

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 18$$

$$X_1 + 4X_2 + 4X_3 \leq 40$$

$$6X_1 + 2X_2 \geq -25$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الطريقة البيانية Graphical Method

عند الطلب في السؤال حل باستخدام Graphical Method نستخدم طريقة الرسم.... كما مبين في الامثلة التالية :

Example1: using Graphical Method to Solve the following (L.P.P) Model?

$$\text{max } Z = 12X_1 + 16X_2$$

s.to

$$2X_1 + X_2 \leq 14$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 15$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

نأخذ القيد الأول ونعوض مرة X_1 صفر ونستخرج قيمة X_2 ومرة X_2 صفر ونستخرج قيمة X_1 وكما يلي:

$$2x_1 + x_2 = 14 \rightarrow 0 + x_2 = 14 \rightarrow x_2 = 14 \quad (0, 14)$$

$$2x_1 + x_2 = 14 \rightarrow 2x_1 + 0 = 14 \rightarrow x_1 = \frac{14}{2} = 7 \quad (7, 0)$$

إذن نقطة المستقيم الأول (7,14)

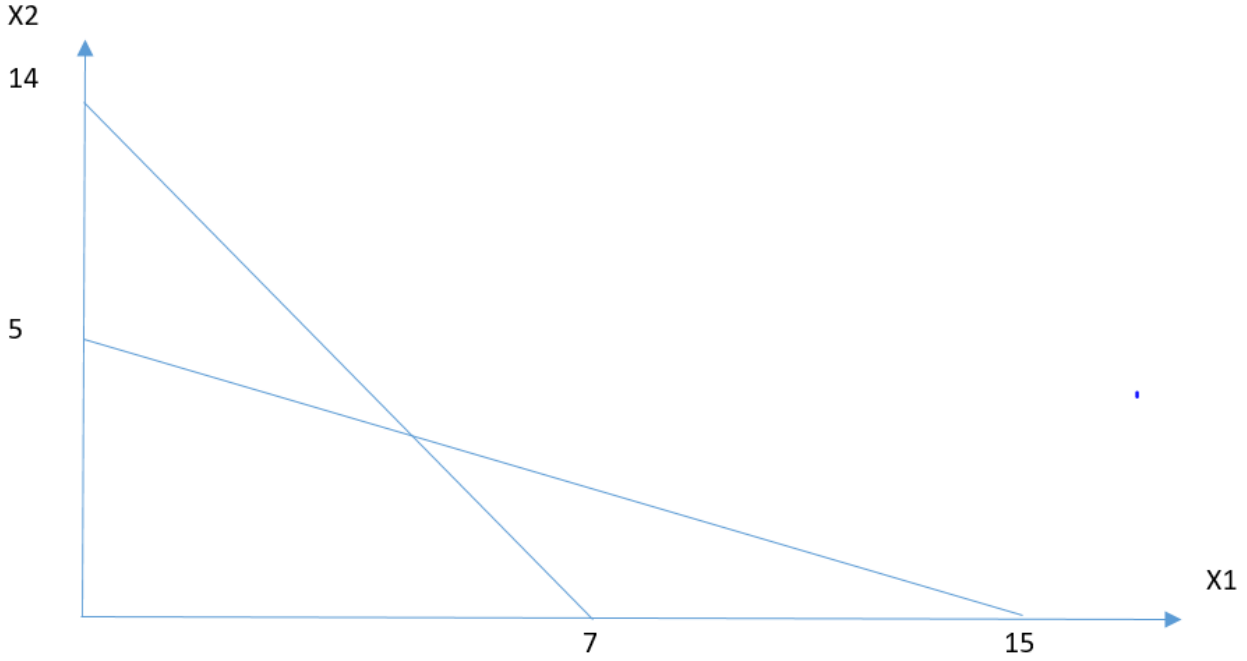
نأخذ القيد الثاني ونعوض مرة X_1 صفر ونستخرج قيمة X_2 ومرة X_2 صفر ونستخرج قيمة X_1 وكما يلي:

$$x_1 + 3x_2 = 15 \rightarrow 0 + 3x_2 = 15 \rightarrow x_2 = \frac{15}{3} = 5 \quad (0, 5)$$

$$x_1 + 3x_2 = 15 \rightarrow x_1 + 0 = 15 \rightarrow x_1 = 15 \quad (15, 0)$$

إن نقطة المستقيم الثاني (15,5)

وألآن نرسم المستقيمت المستخرجة



وألآن نأخذ المستقيمان المتقاطعة ونحلها أنيا واستخراج قيم x_1, x_2

$$2x_1 + x_2 = 14 \dots \dots (1)$$

$$x_1 + 3x_2 = 15 \dots \dots (2) \quad \} * 2$$

$$2x_1 + x_2 = 14$$

$$\mp 2x_1 \mp 6x_2 = \mp 30$$

$$-5x_2 = -16 = x_2 = \frac{-16}{-5} = 3.2 = x_2$$

ونعوض قيمة x_2 المستخرجة في المعادلة (2) وكما يأتي:

$$x_1 + 3x_2 = 15 \rightarrow x_1 + 3(3.2) = 15 \rightarrow x_1 + 9.6 = 15 \rightarrow$$

$$x_1 = 15 - 9.6 \rightarrow x_1 = 5.4$$

من خلال تعويض قيم X_1, X_2 في دالة الهدف المعطاة في السؤال نجد ان قيمة التعويض هي 116

$$Max z = 12x_1 + 16x_2$$

$$= 12(5.4) + 16(3.2) = 116$$

إذن الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في هذا السؤال هو عندما تكون قيمة $X_2=3.2, X_1=5.4$

Example2: using Graphical Method to Solve the following (L.P.P) Model?

$$\max z = 10X_1 + 8X_2$$

s.to

$$3X_1 + 2X_2 \leq 30$$

$$3X_1 + 6X_2 \leq 18$$

$$6X_1 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

نأخذ القيد الأول ونعوض مرة X_1 صفر ونستخرج قيمة X_2 ومرة X_2 صفر ونستخرج قيمة X_1 وكما يلي:

$$3x_1 + 2x_2 = 30 \rightarrow 0 + 2x_2 = 30 \rightarrow x_2 = \frac{30}{2} = 15 \quad (0,15)$$

$$3x_1 + 2x_2 = 30 \rightarrow 3x_1 + 0 = 30 \rightarrow x_1 = \frac{30}{3} = 10 \quad (10,0)$$

إذن نقطة المستقيم الأول (10,15)

نأخذ القيد الثاني ونعوض مرة X_1 صفر ونستخرج قيمة X_2 ومرة X_2 صفر ونستخرج قيمة X_1 وكما يلي:

$$3x_1 + 6x_2 = 18 \rightarrow 0 + 6x_2 = 18 \rightarrow x_2 = \frac{18}{6} = 3 \quad (0,3)$$

$$3x_1 + 6x_2 = 18 \rightarrow 3x_1 + 0 = 18 \rightarrow x_1 = \frac{18}{3} = 6 \quad (6,0)$$

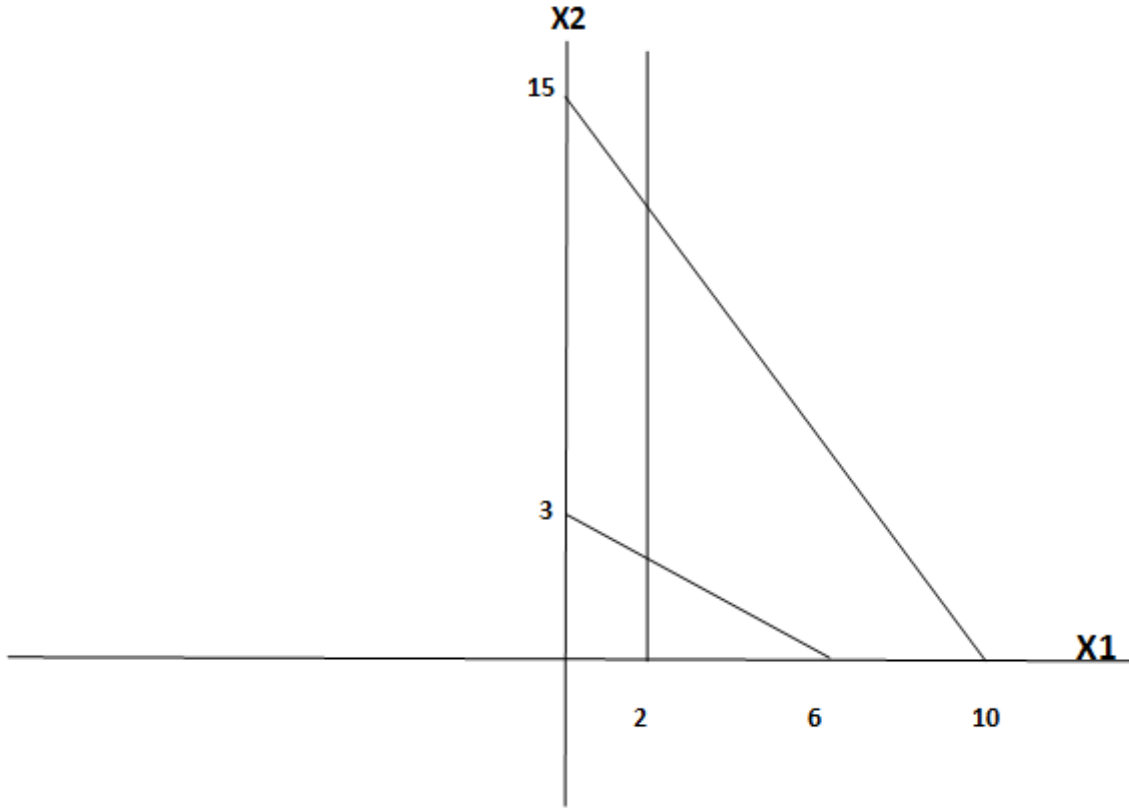
إذن نقطة المستقيم الثاني (6,3)

نأخذ القيد الثالث، ونستخرج قيمة X_1 ونستخرج وكما يلي:

$$6x_1 = 12 \rightarrow x_1 = \frac{12}{6} = 2 \quad (2,0)$$

إن نقطة المستقيم الثالث (2,0) فقط

الآن نرسم المستقيمات الثلاثة



والآن نأخذ المستقيمان المتقاطعة ونحلها أنيا واستخراج قيم X_1, X_2

$$3x_1 + 6x_2 = 18 \dots \dots \dots (2)$$

$$6x_1 = 12 \quad \dots \dots \dots (3) \rightarrow x_1 = \frac{12}{6} = 2$$

ونعوض قيمة x_1 المستخرجة من المعادلة (3) في المعادلة (2) وكما يأتي:

$$3x_1 + 6x_2 = 18 \rightarrow 3(2) + 6x_2 = 18 \rightarrow 6 + 6x_2 = 18 \rightarrow 6x_2 = 18 - 6$$
$$\rightarrow 6x_2 = 12 \rightarrow x_2 = \frac{12}{6} = 2$$

من خلال تعويض قيم X_1, X_2 نجد ان أعلى قيمة للتعويض هي 36

إذن الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في هذا السؤال هو عندما تكون قيمة $X_2=2, X_1=2$

Example3: using Graphical Method to solve the following (L.P.P) Model?

$$\max z= 13X_1 + 5X_2$$

s.to

$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$2X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

نأخذ القيد الأول ونعوض مرة X_1 صفر ونستخرج قيمة X_2 ومرة X_2 صفر ونستخرج قيمة X_1 وكما يلي:

$$2x_1 + x_2 = 4 \rightarrow 0 + x_2 = 4 \rightarrow x_2 = 4 \quad (0, 4)$$

$$2x_1 + x_2 = 4 \rightarrow 2x_1 + 0 = 4 \rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2 \quad (2, 0)$$

إذن نقطة المستقيم الأول (2,4)

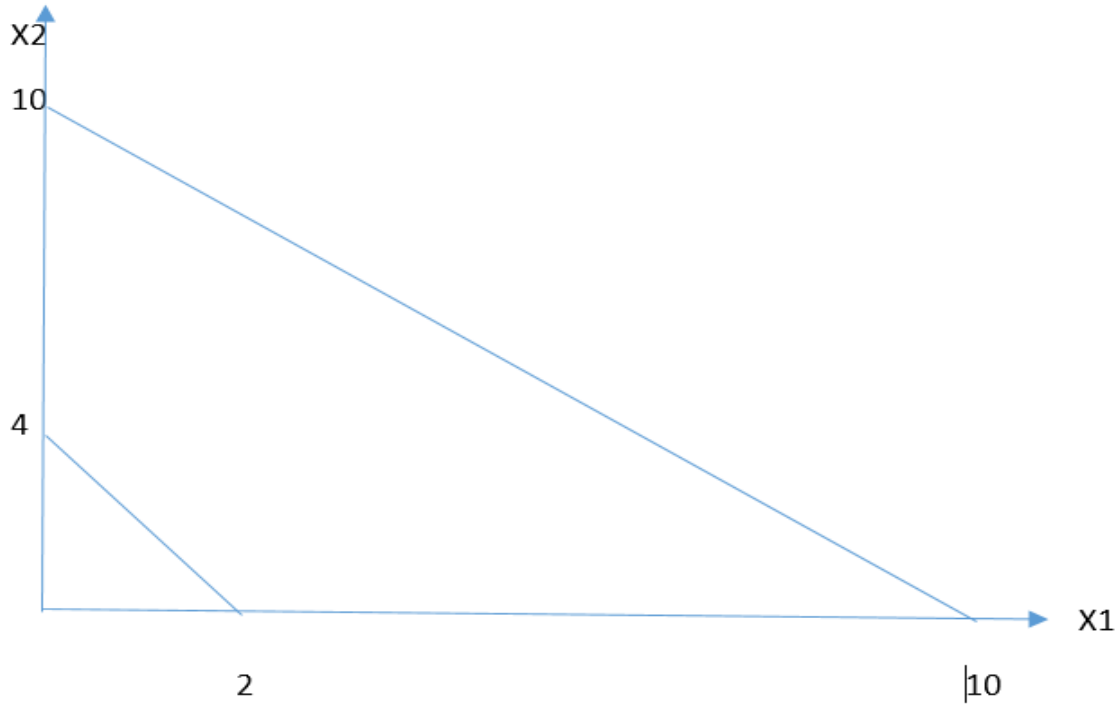
نأخذ القيد الثاني ونعوض مرة X_1 صفر ونستخرج قيمة X_2 ومرة X_2 صفر ونستخرج قيمة X_1 وكما يلي:

$$2x_1 + 2x_2 = 20 \rightarrow 0 + 2x_2 = 20 \rightarrow x_2 = \frac{20}{2} = 10 \quad (0, 10)$$

$$2x_1 + 2x_2 = 20 \rightarrow 2x_1 + 0 = 20 \rightarrow x_1 = \frac{20}{2} = 10 \quad (10, 0)$$

إذن نقطة المستقيم الثاني (10,10)

وألآن نرسم المستقيمت المستخرجت



نلاحظ من خلال الرسم اعلاه عدم تقاطع المستقيمين وبهذا نستنتج لعدم وجود منطقة تقاطع بين المستقيمين اذن لاتوجد منطقة حل ومعنى ذلك لا يوجد حل مقبول لهذه المسألة او نموذج البرمجة الخطية .

Example4: using Graphical Method to solve the following (L.P.P) Model?

$$\max z = 16X_1 + 14X_2$$

s.to

$$2X_1 + 6X_2 \leq 18$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 25$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

نأخذ القيد الأول ونعوض مرة X_1 صفر ونستخرج قيمة X_2 ومرة X_2 صفر ونستخرج قيمة X_1 وكما يلي:

$$2x_1 + 6x_2 = 18 \rightarrow 0 + 6x_2 = 18 \rightarrow x_2 = \frac{18}{6} = 3 \quad (0, 3)$$

$$2x_1 + 6x_2 = 18 \rightarrow 2x_1 + 0 = 18 \rightarrow x_1 = \frac{18}{2} = 9 \quad (9, 0)$$

إذن نقطة المستقيم الأول (9,3)

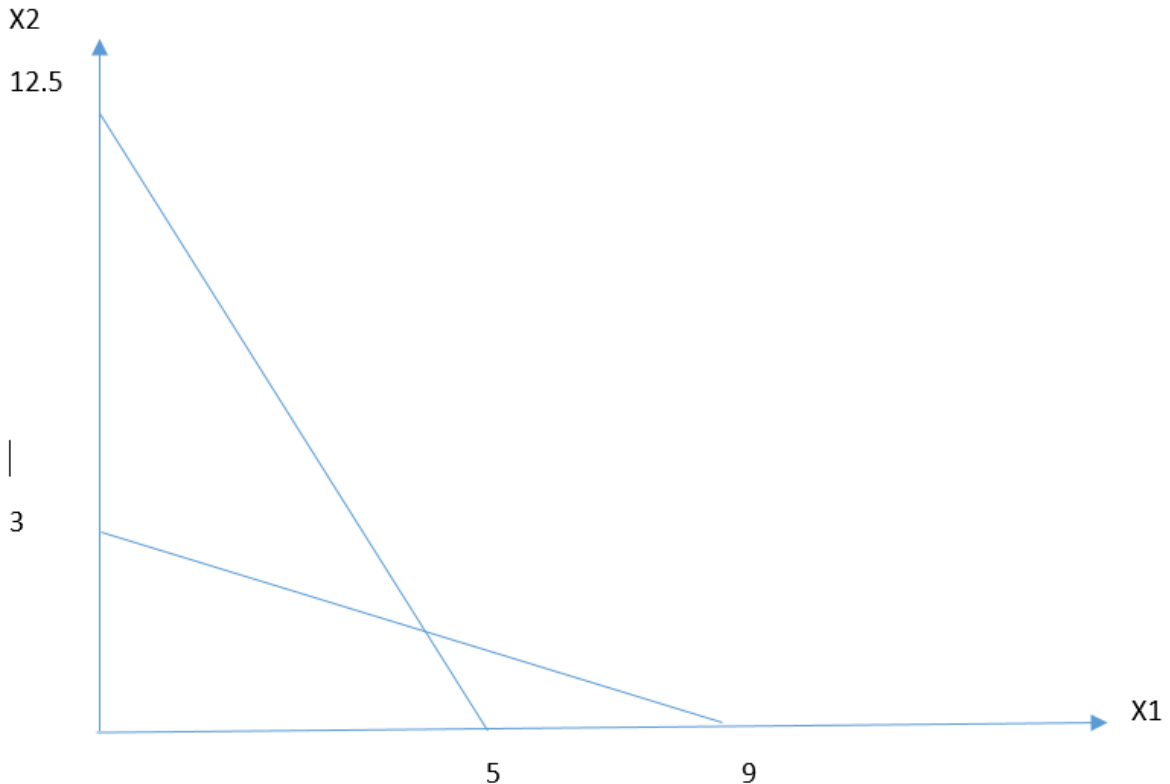
نأخذ القيد الثاني ونعوض مرة x_1 صفر ونستخرج قيمة x_2 ومرة x_2 صفر ونستخرج قيمة x_1 وكما يلي:

$$5x_1 + 2x_2 = 25 \rightarrow 0 + 2x_2 = 25 \rightarrow x_2 = \frac{25}{2} = 12.5 \quad (0, 12.5)$$

$$5x_1 + 2x_2 = 25 \rightarrow 5x_1 + 0 = 25 \rightarrow x_1 = \frac{25}{5} = 5 \quad (5, 0)$$

إذن نقطة المستقيم الثاني (5,12.5)

والآن نرسم المستقيمت المستخرجة



والآن نأخذ المستقيمان المتقاطعة ونحلها أنيا واستخراج قيم x_1, x_2

$$2x_1 + 6x_2 = 18 \dots \dots (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 = 25 \dots \dots (2) \quad \} * 3$$

$$2x_1 + 6x_2 = 18$$

$$-15x_1 + 6x_2 = -75$$

$$-13x_1 = -57 \Rightarrow x_1 = \frac{-57}{-13} = 4.4 = x_1$$

ونعوض قيمة x_1 المستخرجة في المعادلة (1) وكما يأتي:

$$2x_1 + 6x_2 = 18 \rightarrow 2(4.4) + 6x_2 = 18 \rightarrow 8.8 + 6x_2 = 18 \rightarrow$$

$$6x_2 = 18 - 8.8 \rightarrow 6x_2 = 9.2 \rightarrow x_2 = \frac{9.2}{6} = 1.5 = x_2$$

من خلال تعويض قيم x_1, x_2 في دالة الهدف المعطاة في السؤال نجد ان قيمة التعويض هي 91.4

$$Max z = 16x_1 + 14x_2$$

$$= 16(4.4) + 14(1.5) = 91.4$$

اذن الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في هذا السؤال هو عندما تكون قيمة $x_1=4.4, x_2=1.5$

Example5 Home work: using Graphical Method to solve the following (L.P.P) Model?

$$\max z = 20x_1 + 30x_2$$

s.to

$$3x_1 + 2x_2 \leq 90$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Example6 Home work: using Graphical Method to solve the following (L.P.P) Model?

$$\max z = 2x_1 + 5x_2$$

s.to

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الطريقة المبسطة Simplex Method

هي الطريقة العامة لحل مسائل البرمجة الخطية ذات القيود من نوع اقل او يساوي ودالة الهدف لها من نوع Max او Min , اما خطوات الحل هي :

1-نكتب النموذج المعطى في السؤال الى الشكل القياسي .

2-نضع المسألة في جدول يسمى (Simplex table).

3-نحدد المتغير الداخل وهو صاحب اكبر عدد في السالب (اقل قيمة) اذا كانت دالة الهدف Max واكبر عدد او معامل موجب اذا كانت دالة الهدف Min.

4-نحدد المتغير الخارج بقسمة عناصر عمود الحل على المعاملات المتغير الداخل ونختار اقل ناتج ونختار اقل ناتج قسمة مع اهمال القسمة على العدد صفر او العدد السالب.

5-نكون جدول جديد ثم نضع المتغير الداخل بدل المتغير الخارج ونحدد نقطة المحور وهي عنصر تقاطع المتغير الداخل مع المتغير الخارج , ثم ايجاد معادلة المحور عن طريق قسمة عناصر الصف الذي به المحور على قيمة المحور نفسه.

6-لأيجاد عناصر الصفوف الاخرة فنستخرجها حسب المعادلة التالية:

(عناصر الصف الجديد=عناصر الصف القديم -عناصر التقاطع X معادلة المحور)

7- اذا كانت دالة الهدف Max ينتهي الحل عندما تكون جميع القيم موجبة او صفر في سطر Z.

اما اذا كانت دالة الهدف Min ينتهي الحل عندما تكون جميع القيم سالبة او صفر في سطر Z.

Example1: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max z = 8X_1 + 6X_2$$

s.to

$$4X_1 + 2X_2 \leq 60$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 48$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

1-نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك باضافة متغير وهمي اسمه Si وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$4X_1 + 2X_2 + S_1 = 60$$

$$2X_1 + 4X_2 + S_2 = 48$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S1,S2 بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$MaxZ = 8X_1 + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$MaxZ - 8X_1 - 6X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	S1	S2	Sol.	Ratio
Z	-8	-6	0	0	0	---
S1	4	2	1	0	60	15
S2	2	4	0	1	48	24
Z	0	-2	2	0	120	-----
X1	1	0.5	0.25	0	15	30
S2	0	3	-0.5	1	18	6
Z	0	0	1.6	0.6	132	
X1	1	0	-0.3	-0.16	12	
X2	0	1	-0.16	0.3	6	

Example2: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max z = 5X_1 + 3X_2$$

s.to

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 8$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

1-نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك باضافة متغير وهمي اسمه S_i وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 6$$

$$2X_1 + 3X_2 + S_2 = 8$$

$$2X_1 + 4X_2 + S_3 = 10$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S_1, S_2, S_3 بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$\text{Max}Z = 5X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

$$\text{Max}Z - 5X_1 - 3X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	Sol.	Ratio
Z	-5	-3	0	0	0	0	---
S1	1	2	1	0	0	6	6
S2	2	3	0	1	0	8	4
S3	2	4	0	0	1	10	5
Z	0	4.9	0	2.5	0	20	
S1	0	0.5	1	-0.5	0	4	
X1	1	1.5	0	0.5	0	4	
S3	0	1	0	-1	1	2	

Example3: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max z = 3X_1 + 5X_2 + 3X_3$$

s.to

$$-2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 10$$

$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

1- نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك بإضافة متغير وهمي اسمه S_i وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$-2X_1 + 5X_2 + 3X_3 + S_1 = 10$$

$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 + S_2 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S_1, S_2 بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$MaxZ = 3X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$MaxZ - 3X_1 - 5X_2 - 3X_3 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	Sol.	Ratio
Z	-3	-5	-3	0	0	0	
S1	-2	5	3	1	0	10	2
S2	1	4	2	0	1	10	2.5
Z	-5	0	0	1	0	10	----
X2	-0.4	1	0.6	0.2	0	2	-----
S2	2.6	0	-0.4	-0.8	1	2	0.76

Z	0	0	-0.76	-0.53	1.9	13.8	
X2							
X1	1	0	0.15	-0.30	-0.38	0.76	

Example4: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max z = 3X_1 + 2X_2$$

s.to

$$2X_1 + X_2 \leq 60$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 50$$

$$X_1 + X_2 \leq 24$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

1-نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك باضافة متغير وهمي اسمه S_i وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$2X_1 + X_2 + S_1 = 60$$

$$2X_1 + 3X_2 + S_2 = 50$$

$$X_1 + X_2 + S_3 = 24$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S_1, S_2, S_3 بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$\text{Max}Z = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

$$\text{Max}Z - 3X_1 - 2X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	Sol.	Ratio
Z	-3	-2	0	0	0	0	---
S1	2	1	1	0	0	60	30
S2	2	3	0	1	0	50	25
S3	1	1	0	0	1	24	24
Z	0	1	0	0	3	72	
S1	0	-1	1	0	-2	12	
S2	0	1	0	1	-2	2	
X1	1	1	0	0	1	24	

Example5: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max z = 8X_1 + 2X_2 - X_3$$

s.to

$$3X_1 + X_2 \leq 9$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

1-نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك باضافة متغير وهمي اسمه S_i وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$3X_1 + X_2 + S_1 = 9$$

$$2X_1 + 3X_2 + S_2 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S1,S2 بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$MaxZ = 8X_1 + 2X_2 - X_3 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$MaxZ - 8X_1 - 2X_2 + X_3 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	Sol.	Ratio
Z	-8	-2	1	0	0	0	---
S1	3	1	0	1	0	9	3
S2	2	3	0	0	1	10	5
Z	0	2	1	2.6	3	72	
X1	1	0.3	0	0.3	0	3	
S2	0	2.3	0	-0.6	1	4	

Example6 home work : Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max z= X_1 + 2X_2$$

s.to

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 12$$

$$X_1 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Example7 home work : Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max z= 20X_1 + 22X_2$$

s.to

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Example8 home work : Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max z= 70X_1 - 50X_2 - 33X_3$$

s.to

$$10X_1 - 5X_2 \leq 50$$

$$2X_1 + 12X_3 \leq 25$$

$$X_1 \leq 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الثنائية في البرمجة الخطية Duality in Linear Programming

المسألة الثنائية The Dual problem

ان لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً مقابلاً (ثنائياً) يسمى احد النموذجين بالنموذج الاولي Primal Model , بينما يطلق على الاخر تسمية النموذج المقابل (الثنائي) Dual Mode ان من اهم صفات المشتركة للنموذج الاولي والثنائي هو ان الحل الامثل للاحدهما يعطي معلومات كاملة عن الحل الامثل للنموذج الاخر.

تتمثل اهمية الثنائية في مسائل البرمجة الخطية فيما يلي :

1-تقليل عدد القيود وبالتالي تقليص العمل الحسابي.

2-ان حل احدي المسألتين سواء كان الاولية او الثنائية بطريقة Simplex يعطي الحل الامثل للأخرى .

3-هناك علاقة بين البرمجة الخطية ونظرية المباراة حيث من الممكن كتابة مصفوفة المباراة بنموذجين للبرمجة الخطية احدهما اولي والاخر ثنائي والعكس صحيح .

خطوات حل تحويل الاولية الى الثنائية :

1-اذا كانت دالة الهدف Max في الاولية , تصبح Min في الثنائية والعكس صحيح.

2-اذا كانت دالة الهدف Max فان القيود يجب ان تكون بشكل اقل او يساوي , واذا كانت دالة الهدف Min فان القيود يجب ان تكون بشكل اكبر او يساوي .

3-ان كل قيد في الاولية يقابله متغير واحد في المسألة الثنائية يرمز له بالرمز Y_i حيث ان $(i=1,2,3,\dots,m)$ اي ان عدد متغيرات الثنائية يساوي عدد قيود الاولية وعدد قيود الاولية يساوي عدد متغيرات الثنائية.

4-جميع المتغيرات ولكلا المسألتين ذات قيمة موجبة .

5-ان عناصر الطرف الايمن للقيود الاولية تصبح معاملات دالة الهدف في الصيغة الثنائية والعكس صحيح.

6- ان كل قيد مساواة في الاولية يقابله متغير غير مقيد بإشارة في الثنائية والعكس صحيح.

Example 1 : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

حول نموذج البرمجة الخطية الى المسألة الثنائية

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

s.to

$$X_1 + X_2 + 4X_3 \leq 16$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 20$$

$$2X_1 + X_3 \leq 18$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Y1

Y2

Y3

Solution:

$$\text{Min } Y_0 = 16Y_1 + 20Y_2 + 18Y_3$$

s.to

$$Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \geq 2$$

$$Y_1 + Y_2 \geq 2$$

$$4Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \geq 3$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Example 2 : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2$$

s.to

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 20$$

$$X_2 \leq 6$$

$$X_1 \leq 18$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Y1

Y2

Y3

Y4

Solution:

$$\text{Min } Y_0 = 10Y_1 + 20Y_2 + 6Y_3 + 18Y_4$$

s.to

$$Y_1 + Y_2 + Y_4 \geq 1$$

$$2Y_1 + 4Y_2 + Y_3 \geq 1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

Example 3 : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 4X_2 + 8X_3$$

s.to

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 10$$

$$2X_1 + 3X_3 \geq 20$$

$$X_2 + 4X_3 \geq 60$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Y1

Y2

Y3

Solution:

$$\text{Max } Y_0 = 10Y_1 + 20Y_2 + 60Y_3$$

s.to

$$Y_1 + 2Y_2 \leq 2$$

$$Y_1 + Y_3 \leq 4$$

$$Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 \leq 8$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Example 4 : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

$$\text{Min } Z = 12X_1 + 10X_2 + 14X_3$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 10$$

$$2X_1 + X_2 + 4X_3 \geq 50$$

$$3X_1 + 4X_2 = 60$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Y1

Y2

Y3

Solution:

$$\text{Max } Y_0 = 10Y_1 + 50Y_2 + 60Y_3$$

s.to

$$Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \leq 12$$

$$2Y_1 + Y_2 + 4Y_3 \leq 10$$

$$Y_1 + 4Y_2 \leq 14$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

غير مقيد بإشارة Y_3

Example 5 : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

$$\text{Max } Z = X_1 + 5X_2$$

s.to

$$X_1 + X_2 = 10$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 20$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Y_1

Y_2

Solution:

$$\text{Min } Y_0 = 10Y_1 + 20Y_2$$

s.to

$$Y_1 + 2Y_2 \geq 1$$

$$Y_1 + 3Y_2 \geq 5$$

$$Y_2 \geq 0$$

غير مقيد بإشارة Y_1

Example 6 : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

$$\text{Min } Z = 60X_1 + 30X_2 + 15X_3$$

s.to

$$8X_1 + 11X_2 + X_3 \geq 16$$

$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 18$$

$$5X_2 + 11X_3 \geq 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Y1

Y2

Y3

Solution:

$$\text{Max } Y_0 = 16Y_1 + 18Y_2 + 20Y_3$$

s.to

$$8Y_1 + Y_2 \leq 60$$

$$11Y_1 + 4Y_2 + 5Y_3 \leq 30$$

$$Y_1 + 2Y_2 + 11Y_3 \leq 15$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Example 7 Home Work : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 16X_2 + 18X_3 + 21X_4$$

s.to

$$X_1 + 4X_2 + 6X_3 + X_4 \leq 15$$

$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \leq 20$$

$$4X_1 + 3X_2 + X_3 = 60$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Example 8 Home Work : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

$$\text{Min } Z = 15X_1 + 11X_2 + 14X_3$$

s.to

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 5$$

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \geq 10$$

$$X_1 = 8$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

نماذج النقل Transportation Models

المقدمة:

تعتبر نماذج النقل احدى تطبيقات البرمجة الخطية واحد اساليبها الرياضية الكمية المشتقة من النموذج الرياضي العام , وهو يهتم بإيجاد القيم الصغرى لكلف نقل البضائع من مراكز الإنتاج او الاستلام الى مراكز التسوق وصولاً الى المستهلك . لذلك فمن الضروري تحديد الكميات الواجب نقلها من مصادر التجهيز الى مصادر الطلب من اجل اشباع المستهلك وتفاذي حصول عجز بشرط تحقيق اقل تكلفة ممكنة .

ان الكميات المعروضة عند كل مصدر والكميات المطلوبة في كل موقع يفترض ان تكون معلومة وعلى سبيل المثال المنتج ربما ينقل من المصانع التي تمثل المصادر الى المخازن (الموقع).

اما جدول النقل فيمكن تمثيله بالشكل التالي :

	D1	D2	D3	n	Supply
S1	c11 X11	C12 X12	C13 X13	C1n X1n	a 1
S2	C21 X21	C22 X22	C23 X23	C2n X2n	a 2
.
.
.
.
M	Cm1 Xm1	Cm2 Xm2	Cm3 Xm3	Cmn Xmn	a n
Demand	b 1	b 2	b 3	bj	ain bj

حل نموذج النقل :

ان الشرط الاساسي لحل نموذج النقل هو ان يكون النموذج متوازن , اي عندما تكون الكميات المعروضة تساوي الكميات المطلوبة اي ان:

$$\sum a_i = \sum b_j$$

ولكن في الحياة العملية نجد ان هذا التوازن غير متحقق اي ان :

$$\sum a_i \neq \sum b_j$$

عند هذه الحالة يسمى نموذج النقل بأنه نموذج غير متوازن . لذا يجب تحويله الى نموذج متوازن لكي يمكن حله , وقد تواجهنا الحالات التالية :

الحالة الاولى:

اذا كانت الكميات المعروضة اكبر من الكميات المطلوبة اي ان :

$$\sum a_i > \sum b_j$$

نضيف عمود وهمي كلف النقل داخل خلاياه تساوي صفر والطلب عنده يساوي

$$\sum a_i - \sum b_j$$

Example1:

	D1	D2	D3	Supply
S1	7	9	10	10
S2	3	12	11	20
S3	7	8	6	60
Demand	5	10	15	30
				90

$$\sum a_i = 90, \sum b_j = 30$$

$$\sum a_i - \sum b_j = 60$$

اذن جدول النقل يصبح

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	7	9	10	0	10
S2	3	12	11	0	20
S3	7	8	6	0	60
Demand	5	10	15	60	90

الحالة الثانية: اذا كانت الكميات المطلوبة اكبر من الكميات المعروضة اي ان :

$$\sum b_j > \sum a_i$$

نضيف صف وهمي الى خلية النقل كلف النقل داخل كل خلية من خلايا هذا الصف تساوي صفر والعرض عنده يساوي

$$\sum b_j - \sum a_i$$

Example2:

	D1	D2	D3	Supply
S1	8	2	2	8
S2	3	10	3	12

	7	8	10	10
S3				
Demand	15	30	15	60

$$\sum a_i = 30, \sum b_j = 60$$

$$\sum b_j - \sum a_i = 30$$

اذن جدول النقل يصبح

	D1	D2	D3	Supply
S1	8	2	2	8
S2	3	10	3	12
S3	7	8	10	10
S4	0	0	0	30
Demand	15	30	15	60

طرق حل نموذج النقل :

هناك ثلاث طرق لحل نموذج النقل وهي :

1-طريقة الركن الشمالي الغربي North West Corner Method :

خطوات حل هذه الطريقة:

1 نبدأ بالخلية الواقعة شمال غرب خلية النقل في الجدول ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لهذه الخلية اي نقارن 1 a مع 1 b فتظهر لنا ثلاث حالات :

-إذا كانت $b_1 < a_1$ نضع $X_{11}=b_1$ ثم ننتقل الى الخلية X_{12} .

-إذا كانت $b_1 > a_1$ نضع $X_{11}=a_1$ ثم ننتقل الى الخلية X_{21} .

-إذا كانت $b_1 = a_1$ نضع X_{11} تساوي a_1 او b_1 ثم ننتقل الى الخلية قطرياً.

2-نستمر بهذه المقارنة حيث في كل خطوة يتحقق القيود لنموذج النقل وبشكل متعاقب مبتعدين عن الزاوية الشمالية الغربية حتى نصل الى الخلية الواقعة جنوب شرق الجدول عندها تكون جميع القيود النموذج النقل قد تحققت.

3- احتساب الكلفة النقل الكلية (Total Cost) من خلال اخذ كل خلية مليونة واجراء عملية ضرب رياضية بين الكلفة و الكمية المنقولة وجمعها .

Example1: Solve the (T.M) by using (North west corner Method)?

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4	6	2	4	5
S2	3	0	5	6	25
S3	7	8	9	10	20
Demand	10	5	15	20	

Solution:

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4 5	6	2	4	5 0
S2	3 5	0 5	5 15	6	25 20 15 0
S3	7	8	9	10 20	20 0
Demand	10 5 0	5 0	15 0	20 0	

وألان يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

$$T.C = (4*5) + (3*5) + (0*5) + (5*15) + (10*20) = 310$$

Example2: Solve the (T.M) by using (North west corner Method)?

	D1	D2	D3	Supply
S1	20	3	4	6
S2	10	12	5	4
S3	5	11	30	10
Demand	5	10	5	

Solution:

	D1	D2	D3	Supply
S1	20 5	3 1	4 6	1 0
S2	10	12 4	5 4	0
S3	5	11 5	30 5	10 5 0
Demand	5 0	10 9 5 0	5 0	20 20

وألان يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

$$T.C = (5 \times 20) + (1 \times 3) + (4 \times 12) + (5 \times 11) + (5 \times 30) = 356$$

Example3 Home work : Solve the (T.M) by using (North west corner Method)?

	D1	D2	D3	Supply
S1	14	8	9	10
S2	11	10	15	10
S3	2	14	20	12
S4	7	10	12	14
Demand	20	18	8	

2-طريقة الأقل كلفة Least Cost Method:

خطوات حل هذه الطريقة:

- 1-نختار الخلية ذات الاقل كلفة من جدول النقل.
- 2-يتم تخصيص قيمة للمتغير داخل هذه الخلية وذلك بمقارنة العرض مع الطلب المناظر لتلك الخلية .
- 3-يتم حذف الصف او العمود الذي يتحقق.
- 4-نكرر جميع الخطوات السابقة حتى يتم حذف جميع الصفوف وجميع الاعمدة اي ان قيود نموذج النقل قد تحققت .

Example1: Solve the (T.M) by using (Least Cost Method)?

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4	6	2	4	5
S2	3	0	5	6	25
S3	7	8	9	10	20
Demand	10	5	15	20	

Solution:

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4	6	2	4	5 0
S2	3	0	5	6	25 20 10 0
S3	7	8	9	10	20 0
Demand	10 0	5 0	15 10 0	20 0	

وألان يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

$$T.C = (2*5) + (3*10) + (0*5) + (5*10) = 290$$

Example2: Solve the (T.M) by using (Least Cost Method)?

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	6	12	15
S2	16	10	2	25
S3	10	7	8	20
Demand	25	10	25	

Solution:

	D1	D2	D3	Supply
S1	2 15	6	12	15 0
S2	16	10	2	25 0
S3	10 10	7	8	20 10 0
Demand	25 10 0	10 0	25 0	60 60

وألان يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

$$T.C = (2*15) + (2*25) + (10*10) + (7*10) = 250$$

Example3 Home work: Solve the (T.M) by using (Least Cost Method)?

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	10	9	6	5	15
S2	13	0	5	6	22
S3	11	12	9	4	28
Demand	10	15	15	20	

3-طريقة فوجل Vogel Method :

تعتبر هذه الطريقة من افضل الطرق لحل مشكلة النقل وذلك لكون الحل الذي نتوصل اليه اقرب الى الحل الامثل .

خطوات حل هذه الطريقة:

- 1- نجد الفرق بين اقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود ويسمى هذا الفرق (بكلفة الجزاء).
- 2- يتم اختبار الصف او العمود الذي يناظر اكبر كلفة جزاء (اكبر رقم).
- 3- يتم تحديد خلية ذات اقل كلفة في الصف او العمود الذي يتم اختياره في الخطوة السابقة.
- 4- يتم تخصيص قيمة للمتغير في هذه الخلية بمقارنة العرض مع الطلب المناظر لها.
- 5- يتم حذف الصف او العمود الذي يتحقق.
- 6- نكرر جميع الخطوات السابقة حتى يتم حذف جميع الصفوف وجميع الاعمدة اي ان قيود نموذج النقل قد تحققت.

Example1: Solve the (T.M) by using (Vogel Method)?

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4	6	2	4	5
S2	3	0	5	6	25
S3	7	8	9	10	20
Demand	10	5	15	20	

Solution:

	D1	D2	D3	D4	Supply	الكلف المطروحة
S1	4	6	2	4	5	2
S2	3	0	5	6	25 20	3
S3	7	8	9	10	20	1
Demand	10	5 0	15	20		
الكلف المطروحة	1	<u>6</u>	3	2		

	D1	D3	D4	Supply	الكلف المطروحة
S1	4	2	4	5 0	2
S2	3	5	6	20	2
S3	7	9	10	20	2
Demand	10	15 10	20		
الكلف المطروحة	1	<u>3</u>	2		

	D1	D3	D4	Supply	الكلف المطروحة
S2	10 3	5	6	20 10	2
S3	7	9	10	20	2
Demand	10 0	10	20		
الكلف المطروحة	<u>4</u>	4	4		

	D3	D4	Supply	الكلف المطروحة
S2	10 5	6	10 0	1
S3	9	10	20	1
Demand	10 0	20		
الكلف المطروحة	<u>4</u>	4		

	D4	Supply	الكلف المطروحة
S3	20 10	20 0	10
Demand	20 0		
الكلف المطروحة	10		

وألا يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

$$T.C = (0*5) + (2*5) + (3*10) + (5*10) + (10*20) = 290$$

Q5:H.W: Solve the (T.M) by using (1-North West Corner Method

2-Least cost Method

3- Vogel Method)?

المطلوب : حل نموذج النقل باستخدام (1- طريقة الركن الشمالي الغربي 2- طريقة الأقل كلفة, 3- طريقة فوجل) ؟

to	Destination				
From	1	2	3	4	Supply
1	12	5	4	9	40
2	11	10	14	8	22
3	3	7	0	4	28
Demand	21	29	15	25	

Q1: Write the following (L.P.P) in **Canonical form**?

المطلوب : تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة القانونية ؟

$$\min Z= 20X_1 + 22X_2 + 3X_3$$

s.to

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 20$$

$$X_2 + 2X_3 = 22$$

$$X_1 + X_2 \leq 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Q2: Write the following (L.P.P) in **Standard form**?

$$\text{Min } z= 13X_1 + 12X_2 + 7X_3$$

s.to

$$2X_1 + 3X_2 \leq 20$$

$$3X_1 + 2X_3 \geq 25$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Q3: using **Graphical Method** to Solve the following (L.P) Model?

$$\max Z= 2X_1 + 5X_2$$

$$2X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Q4 : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

$$\text{Max } Z = 20X_1 + 12X_2 + 15X_3$$

s.to

$$X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 15$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 20$$

$$5X_1 + 2X_2 + 7X_3 = 80$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Q5: Solve the (T.M) by using (1-North West Corner Method ,

2-Least cost Method ,

3- Vogel Method)?

المطلوب : حل نموذج النقل باستخدام (1- طريقة الركن الشمالي الغربي

2- طريقة الأقل كلفة,

3- طريقة فوجل) ؟

to \ From	1	2	3	4	Supply
1	12	5	4	9	40
2	11	10	14	8	22
3	3	7	0	4	28
Demand	21	29	15	25	