جامعة الفراهيدي/ كلية الإدارة والاقتصاد

محاضرات في مادة:

الرياضيات العامة

د. مثنى عبد الإله الوائلي

muthana6644@gmail.com

بغداد 2023

الفئة وأنواعها

يُقصد **بالفئة (المجموعة):** هي تلك المجموعة التي تضم عناصر متشابهة أو متجانسة مثل: مجموعة الكرات البيضاء، أو مجموعة الأقلام الزرقاء، أو مجموعة العمال في شركة البيبسي... إلخ.

هناك أنواع من الفئات (المجموعات)، وهي:

أولاً: المجموعة المنتهية: هي تلك التي تحتوي على عدد محدود من العناصر. مثل:

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

$$B = \{\text{خالد}, \text{علي}, \text{أسامة}\}$$

ثانياً: المجموعة اللانهائية: هي التي تحتوي على عدد غير محدود (لا نهائي) من العناصر. مثل:

$$A = \{1,2,3, \dots +\infty\}$$

∞: رمز الما لا نهاية.

ثالثاً: المجموعة الخالية: هي التي تضم عناصر غير موجودة. مثل: مجموعة الجبال الذهبية، وبما أنه لا توجد جبال ذهبية في الواقع، فإن المجموعة تبقى خالية. ونرمز لها بالرمز $\{\phi\}$.

رابعاً: المجموعات المتساوية: يقال للمجموعتين أنهما متساويتان إذا كانت كل منهنَّ تضم نفس عناصر المجموعة الأخرى. مثال:

$$A = \{9,-1,5\}$$

$$B = \{-1,9,5\}$$

ونكتب: $A = B$

أما إذا كانت المجموعتان غير متساويتان، فنكتب ما يلي: $A \neq B$

خامساً: المجموعات المتكافئة: يقال للمجموعتين A، وB أنهما متكافئتان إذا وُجد تناظر (تساوي) بين عدد عناصر المجموعتين. مثال:

$$A = \{\text{خالد}, \text{علي}, \text{أسامة}\}$$

$$B = \{\text{عمر}, \text{أحمد}, \text{مصطفى}\}$$

ونكتب: $A \equiv B$

سادساً: المجموعة الجزئية: إذا كانت جميع عناصر المجموعة A تنتمي أيضاً للمجموعة B، وكانت $A \neq B$، فيقال عندئذٍ إن A مجموعة جزئية من B.

ونكتب: $A \subset B$.

بينما إذا كانت $A = B$ وفي الوقت نفسه أن جميع عناصر A تنتمي لمجموعة B، فيقال هنا بأن $A \subseteq B$ (أي متساوية وجزئية).

مثال: حدّد أي من المجموعات التالية جزئية، وأيهما غير جزئية؟

1) .

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{2,4,6,8,10\}$$

2).

$$C = \{3,2,1\}$$
$$D = \{1,2,3\}$$

3).

$$E = \{1,3\}$$
$$F = \{1,2,3,4\}$$

الحل:

1) .

$$A \not\subset B, \quad B \not\subset A$$

2).

$$C \subseteq D, \quad D \subseteq C$$

3).

$$E \subset F, \quad F \not\subset E$$

العمليات على المجموعات:

ندرس هنا عمليات الاتحاد، والتقاطع، والفرق، والتتميم، وكما يلي:

أولاً: الاتحاد:

هي عملية جمع عناصر المجموعتين A، وB المشتركة وغير المشتركة.
ويرمز للاتحاد بالرمز $\cup$:

مثال:

إذا كانت: $A = \{4,-1,5\}$، و $B = \{12,4,-1\}$

فإن: $A \cup B = \{4,-1,5,12\}$

ثانياً: التقاطع:

هي عملية أخذ العناصر المشتركة فقط من كلتا المجموعتين A، وB. ويرمز للتقاطع بالرمز $\cap$:

مثال:

إذا كانت: $A = \{4, -1,5\}$، و $B = \{12,4, -1\}$

فإن: $A \cap B = \{4, -1\}$

ثالثاً: الفرق:

هو الباقي من عناصر المجموعة الأولى بعد طرح العناصر المشتركة مع الثانية. ويرمز للتقاطع بالرمز $(-)$:

مثال:

إذا كانت: $A = \{1,2,3,4\}$، و $B = \{3,4,5,6\}$

فإن: $A - B = \{1,2\}$

رابعاً: التتميم:

إن المجموعة المتمّمة للمجموعة A هي مجموعة تحتوي على العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الشاملة ولا تنتمي إلى المجموعة A. ويرمز للمجموعة المتمّمة بالرمز $\overline{A}$.

مثال:

إذا كانت: $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$، و $A = \{1.2.3.4.5\}$

فإن: $\overline{A} = \{6,7,8,9\}$

المتباينات (المتراجحات)

المتباينة: تعبير رياضي يعني عدم المساواة بين شيئين مثل: (أوزان، كميات، ... إلخ)، مثل A، و b على طرفي علامة التباين.

فإذا كانت : $A > B$

فإن : $A - B > 0$

أو: $0 > B - A$

خواص المتباينات:

1. خاصية الجمع: إذا أضفنا أو طرحنا نفس العدد إلى طرفي المتباينة، فإن علامة التباين تبقى في نفس الاتجاه.

مثال: إذا كانت لدينا المتباينة $5 < 7$، ثم أضفنا العدد (3) مثلاً إلى طرفي المتباينة،

فإن: $5 + 3 < 7 + 3$

$$8 < 10$$

أما إذا طرحنا العدد (3) من طرفي المتباينة، فإن:

$$5 - 3 < 7 - 3$$

$$2 > 4$$

2. **خاصية الضرب:** بهنا توجد حالتين:

أ. تبقى علامة التباين في نفس الاتجاه عند ضرب المتباينة بعدد موجب. مثل:

$$5 < 7$$

نضرب بالعدد (2): $5(2) < 7(2)$

$$10 < 14$$

ب. ينعكس اتجاه علامة التباين في حالة طرب المتباينة بعدد سالب. مثل:

$$5 < 7$$

نضرب بالعدد (2): $5(-2) < 7(-2)$

$$-10 > -14$$

ملاحظات:

1. عند تقسيم طرفي المتباينة على عدد موجب، تبقى علامة التباين في نفس الاتجاه، وعند القسمة على عدد سالب ينعكس اتجاه علامة التباين.

2. في حالة المتباينة الخطية، ووجود متغير واحد (X)، يتم حل هذه المتباينة بوضع المتغير وحده في طرف، وبقية الأعداد في الطرف الثاني. مثل:

$$X + 5 > 2$$

$$X > 2 - 5$$

$$\therefore X > -3$$

3. عند وجود متغيرين (في كل طرف متغير) يجب أن نجعل المتغيرين في طرف واحد، وبقية الأعداد في الطرف الآخر، والانتباه لتغيير إشارة أي حد يتم نقله من طرف لآخر.

4. إذا كان معامل X عدد كسري، نضرب الطرفين بمقام X، كما يلي:

$$\frac{1}{2}X > 5$$

$$\frac{X}{2} > 5$$

$$2(\frac{X}{2}) > 2(5)$$

$$\therefore X > 10$$

أمثلة:

مثال 1: حل المتباينة التالية:

$$2X - 4 > 10 + X$$

$$2X - X > 10 + 4$$

$$\therefore X > 14$$

مثال 2: حل المتباينة التالية:

$$3X - 2 > 6 + X$$

$$3X - X > 6 + 2$$

$$2X > 8$$

$$\frac{2X}{2} > \frac{8}{2}$$

$$\therefore X > 4$$

مثال 3: حل المتباينة التالية:

$$2X + 1 > 3X$$

$$2X - 3X > -1$$

$$-X > -1$$

نضرب الطرفين بـ 1- (فتنعكس علامة التباين):

$$\therefore X < 1$$

مثال 4: حل المتباينة التالية:

$$\frac{2 + X}{3} > 10$$

نضرب الطرفين بـ 3:

$$3(\frac{2 + X}{3}) > 3(10)$$

$$2 + X > 30$$

$$X > 30 - 2$$

$$X > 28$$

المتباينة المركَّبة:

هي متباينة تحتوي على علامتين للتباين، وتسمى بالمركَّبة لأن فيها ثلاثة أطراف: الأيسر، والأوسط، والأيمن. يتم حل هذا النوع من المتباينات، كما يلي:

ملاحظات لحل المتباينة المركَّبة:

ملاحظة 1: إذا كان في المتباينة متغيراً (X) واحداً في طرف ما: نقسِّم كل الأطراف الثلاثة على معامل X (العدد المضروب بـ X).

مثال 1: حلّ المتباينة التالية: $5 < 2X \leq 3$

$$\frac{5}{2} < \frac{2X}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$2.5 < X \leq 1.5$$

مثال 2: حل المتباينة التالية: $7 \leq 3X - 2 \leq 16$

نضيف العدد (2) إلى كل الأطراف الثلاثة:

$$7 + 2 \leq 3X - 2 + 2 \leq 16 + 2$$

$$9 \leq 3X \leq 18$$

نقسِّم على معامل X:

$$3 \leq X \leq 6$$

مثال 3: حل المتباينة التالية: $2 \leq \frac{X}{2} + 1 < 5$

نطرح العدد (1) من جميع الأطراف:

$$2 - 1 \leq \frac{X}{2} + 1 - 1 < 5 - 1$$

$$1 \leq \frac{X}{2} < 4$$

نضرب في العدد (2):

$$2 \leq X < 8$$

ملاحظة 2: عند وجود أكثر من متغير واحد موزعة على عدة أطراف: يتم حل المتباينة على مرحلتين:

الأولى: تشمل الطرفين (الأيسر والأوسط).

الثانية: تشمل الطرفين (الأوسط والأيمن).

مثال: حل المتباينة التالية: $X + 1 \leq 3X + 10 \leq 100$

المرحلة الأولى: الطرفين الأيسر والأوسط:

$$X + 1 \leq 3X + 10$$

ننقل المتغيرات إلى الطرف الأوسط:

$$1 - 10 \leq 3X - X$$

$$-9 \leq 2X$$

نقسم على معامل X:

$$\frac{-9}{2} \leq \frac{2X}{2}$$

$$\therefore -4.5 \leq X$$

المرحلة الثانية: الطرفين الأوسط والأيمن:

$$3X + 10 \leq 100$$

$$3X \leq 100 - 10$$

$$3X \leq 90$$

$$\frac{3X}{3} \leq \frac{90}{3}$$

$$\therefore X \leq 30$$

وأخيراً ندمج نتيجتي المرحلتين معاً، كما يلي:

$$-4.5 \leq X \leq 30$$

الفترات

إن المتغير هو رمز مثل X يمكن أن يأخذ أية قيمة من مجموعة أعداد معينة، وتسمى مجموعة الأعداد هذه التي يمكن لـ X أن تتغير عليها اسم نطاق X، أو يسمى بـ (X Domain)، ويكون نطاق التغير مجالاً من الأعداد في حالات أربع، وكما يلي:

1. **المجال المفتوح:** يتكون من جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين عددين ثابتين a، وb.

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{a}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{b}\}$$

ويقصد بالرمز (a,b) المجال المفتوح بين عددين الأصغر a والأكبر b، ونستخدم قوسين صغيرين من الجهتين للتعبير عن ذلك.

2. **المجال نصف المفتوح من اليمين $[a,b)$:** **الذي** يضم العدد الأيسر وكذلك كل الأعداد الواقعة بين a، وb ولا يضم العدد الأيمن. نستخدم قوس كبير "]" للإشارة إلى المجال المغلق من الطرف الأيسر وقوس ")" للإشارة إلى المجال المفتوح من الطرف الأيمن. أي:

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{x}<\boldsymbol{b}\}$$

3. **المجال نصف المفتوح من اليسار $(a,b]$:** الذي يضم كل الأعداد الأكبر من العدد a وكذلك العدد الأيمن b. نستخدم قوس صغير "(" للإشارة إلى المجال المفتوح من الطرف الأيسر وقوس كبير "[" للإشارة إلى المجال المغلق من الطرف الأيمن. أي:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{a}<\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\}$$

4. **المجال المغلق $[a,b]$:** يحتوي كلا العددين a، وb إضافة إلى الأعداد المحصورة بينهما. أي:

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\}$$

ملاحظة: المجالات غير المنتهية يمكن استخدامها أيضاً إلى جانب المجالات المنتهية.

مثال 1: مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة، نرمز لها بالرمز $(-\infty, 0)$، وإذا كان الصفر مشمولاً نكتب $(-\infty, 0]$.

مثال 2: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة عدا الصفر، نرمز لها بالرمز $(0,+\infty)$، وإذا كان الصفر مشمولاً نكتب $[0, +\infty)$.

وبما أن $\infty +$ ،و$-\infty$ ليسا عددين حقيقيين فإننا لا نستخدم القوس الكبير بجانب أي طرف لا نهائي (ينتهي بما لا نهاية). ونستخدم الرمز ح، أو R، أو $(-\infty, +\infty)$ للإشارة إلى مجموعة جميع الأعداد الحقيقية.

أمثلة تطبيقية

مثال 1: جد نطاق X من المتباينة التالية: $5X - 9 \geq 2X + 3$

الحل:

$$5X - 2X \geq 3 + 9$$
$$3X \geq 12$$
$$X \geq 4$$

إذن نطاق X هو: $\{X: 4 \leq X < +\infty\}$ ، أو: $[4, +\infty)$

مثال 2: حل المتباينة التالية، وأوجد نطاق X:

$$X - 2 \leq 4X + 1 \leq 13 + 3X$$

الحل: أولاً نأخذ الطرفين الأيسر والأوسط، كما يلي:

$$X - 2 \leq 4X + 1$$
$$-2 - 1 \leq 4X - X$$
$$-3 \leq 3X$$
$$\therefore \ -1 \leq X$$

ثانياً نأخذ الحدين الأوسط والأيمن، كما يلي:

$$4X + 1 \leq 13 + 3X$$
$$4X - 3X \leq 13 - 1$$
$$X \leq 12$$

أي أن:

$-1 \leq X \leq 12$ أو: $[-1,12]$

الدوال Functions

قبل دراسة الدالة وأنواعها، من الضروري التعرّف على مفهوم المتغيّر.

المتغيّر: وهو كل شيء قابلة قيمته للتغيّر.

مثل: حجم الإنتاج، الكلفة الكليّة، السعر، الإيراد، الربح، عدد العمال، العمر، السرعة... إلخ.

هناك متغيّرات مستقلة، وأخرى تابعة. فالمتغيّر المستقل "المفسّر" هو ذاك الذي يؤثر في المتغيّر التابع ويغيّره. والمتغيّر التابع، هو المتغيّر الذي تتغيّر قيمته تبعاً لتغيّرات المتغيّر المستقل.

قد يكون متغيّر ما مستقلاً عندما يؤثر في غيره، ونفس المتغيّر يكون تابعاً عند تأثره بمتغيّر آخر. ويُرمز عادة للمتغير المستقل بالرمز X، وللمتغيّر التابع بالرمز Y.

يكون سعر السلعة متغيّراً تابعاً عند دراسة علاقته بكلفة إنتاج السلعة (علاقة طردية). لكنه يكون متغيّراً مستقلاً عند دراسة علاقته بالكمية المطلوبة منها (علاقة عكسية).

تعريف الدالة (Function):

هي صيغة «أو تركيب» رياضي، توضّح العلاقة بين متغيرين أو أكثر. يُرمز لها بالرمز F (X)، وتسمى Y: قيمة F عند X.

$$Y = F(X)$$

في الدالة أعلاه:

X: المتغيّر المستقل.

Y: المتغيّر التابع.

أنواع الدول:

يوجد العديد من أشكال الدوال، ومنها، ما يلي:

1. الدالة الثابتة Constant Function.
2. الدالة الخطية Linear Function.
3. الدالة الأسية Exponential Function، مثل:
   * . الدالة التربيعية Quadratic Function.
   * . الدالة التكعيبية Cubic Function.
4. الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function.

وسندرس تلك الأشكال بالتفصيل في محاضراتنا القادمة.

القوانين الفيزيائية والكيميائية والهندسية هي بالأساس دوالاً رياضية دقيقة، وغير قابلة للتعديل، بسبب إنّها تفسّر علاقات طبيعية دقيقة. على سبيل المثال: مساحة المربع تساوي مربع طول الضلع. وإذا رمزنا للمساحة بالرمز Y، ولطول الضلع بالرمز X، فيُكتب القانون كما يلي:

$$Y = X^2$$

بينما لا يمكن إيجاد قوانين دقيقة في العلوم الاقتصادية والمحاسبية والإدارية كونها تتعامل مع البشر ومتغيراتهم غير المستقرة (أذواق، عادات، توقعات، أخطاء، حروب، أزمات، ... وغيرها)، لذلك يحاول الباحثون الاقتصاديون إيجاد علاقات قريبة من الدقّة قدر الإمكان من خلال استخدام الدوال الرياضية «على الرغم من إن الباحث متأكد بأنَّ دالته تقريبية وليست دقيقة 100%».

ماذا نستفيد من الدوال في العلوم الاقتصادية؟

إن العلاقات الرياضية «الدوال» بين متغيّر تابع وآخر مستقل «أو أكثر»، يمكّنُنا من تقدير قيمة المتغيّر التابع عند أي قيمة يكون عليها المتغيّر المستقل «أو المتغيّرات المستقلة». أي إن الدالة تنفعنا لتوقع قيمة المتغيّرات في المستقبل، وهذا يساعدنا في توخّي الدقة أثناء عمليات التخطيط.

فمثلاً: من دالة التكاليف الكليّة لمنشأة معينة، يمكن تقدير قيمة التكاليف الكلية استناداً إلى عدد الوحدات المنتجة في المنشأة.

ومن دالة الطلب السعرية لسلعة معينة، يمكن تقدير كمية طلب المستهلكين على السلعة عند تغيّر سعر الوحدة الواحدة منها.

أمثلة مبسَّطة:

احسب قيمة Y من الدوال التالية، عندما $(X = 10)$:

1). $F(X) = 5 + X$, 2). $Y = X^2 + 2X - 3$, 3). $Y = 2x^2 + \frac{5}{X-5}$

1). $F(10) = 5 + 10$

$F(10) = 15$

2). $Y = (10)^2 + 2(10) - 3$

$Y = 100 + 20 - 3$

$Y = 117$

3). $Y = 2(10)^2 + \frac{5}{10-5}$

$Y = 2(100) + \frac{5}{5}$

$Y = 200 + 1$

$Y = 201$

أشكال الدوال

1. الدالة الثابتة Constant Function:

هي شكل من أشكال الدالة الخطيّة، وتكون فيها قيمة Y ثابتة، بغض النظر عن قيمة X، وتُرسم الدالة الثابتة بشكل خط مستقيم موازي للإحداثي الأفقي.

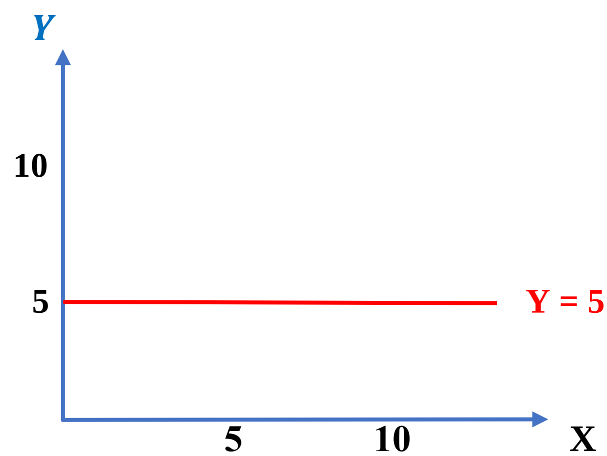
صيغتها العامة: $\boldsymbol{Y = K}$

K: هو عدد حقيقي ثابت.

Y = 100

Y = -2

$Y = \sqrt{15}$



صيغة الدالة: **Y = 5**

2. الدالة الخطيّة Linear Function:

هي الدالة التي يكون فيها أعلى أُس فيها "للمتغير المستقل" هو الواحد الصحيح، وتأخذ شكل خط مستقيم. وتسمى أيضاً "دالة من الدرجة الأولى".

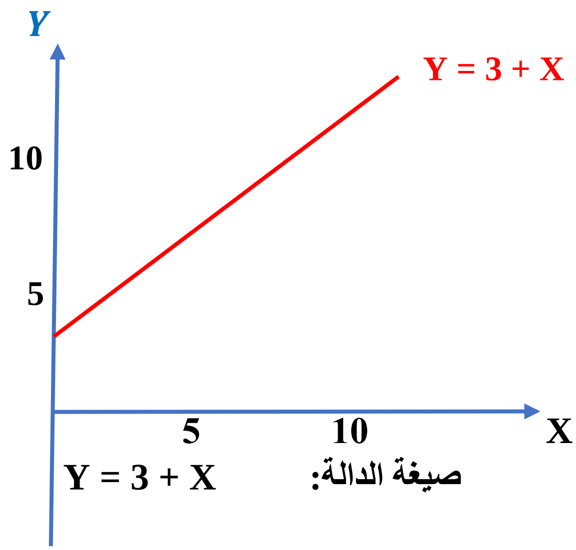
صيغتها العامة: $\boldsymbol{Y = a + bX}$

$\boldsymbol{a, b}$**:** عددان حقيقيان، ويطلق عليهما بالمعاملات. حيث إن $\boldsymbol{a}$**:** الحد الثابت، و$\boldsymbol{b}$**:** ميل الدالة. مثل:

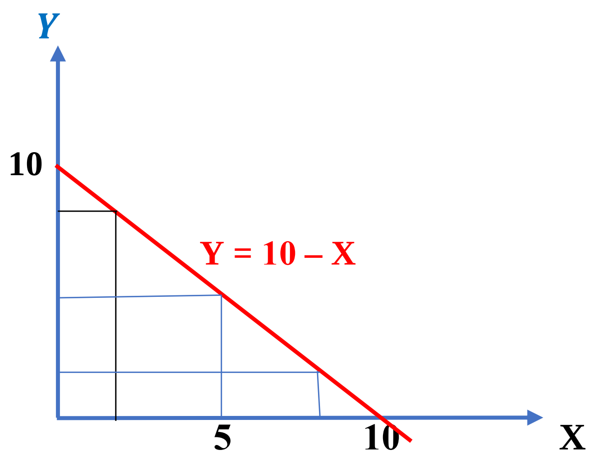
$Y = 2X$

$Y = 3X - 1$

$Y = -X + 4$



صيغة الدالة: Y = 3 + X



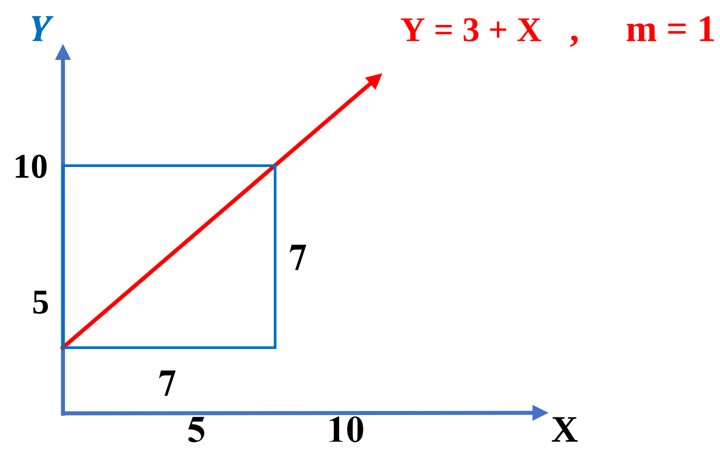
صيغة الدالة: Y = 10 - X

ميل الدالة الخطيّة:

إن أحد الخصائص الهامة للخط المستقيم هو كيفية انحداره إلى الأعلى أم إلى الأسفل، وهذا الانحدار يدعى بـ "الميل".

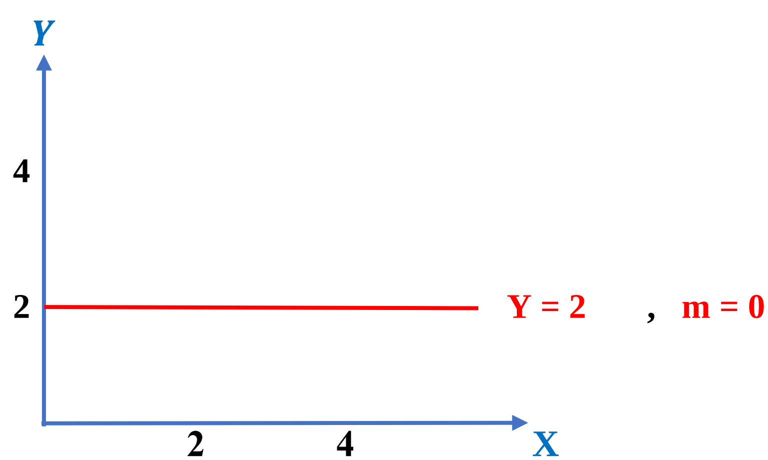
تعريف **الميل Slope:** هو ظل الزاوية (المقابل/ المجاور) المحصورة بين الخط المستقيم "الدالة الخطيّة" المراد قياس ميله، وبين أي خط أفقي يقطعه، ويرمز له بالرمز m. وصيغته المبسَّطة هي:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

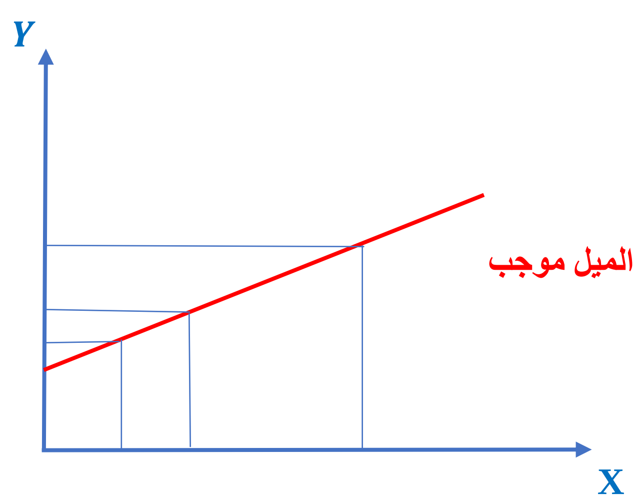


صيغة الدالة: Y = 3 + X

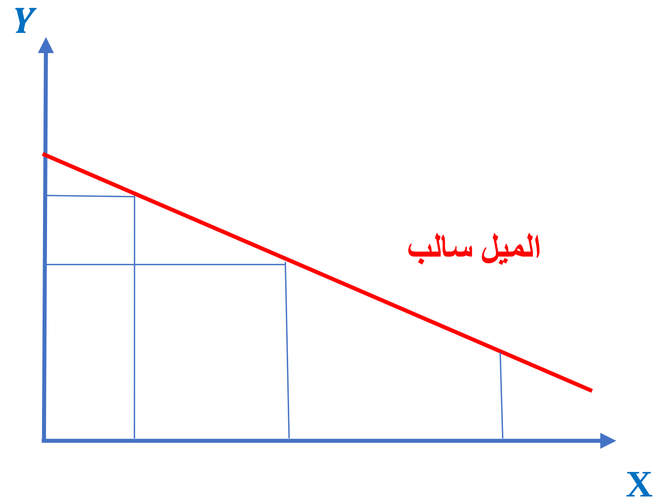
في الدالة الثابتة الميل يُساوي صفراً، لأن الدالة الثابتة موازية للمحور الأفقي "غير مائلة".



يكون الميل موجباً "للدالة الخطية" عندما تكون العلاقة طردية بين المتغيرين Y وX.



ويكون الميل سالباً "للدالة الخطية" عندما تكون العلاقة عكسية بين المتغيرين Y وX.



أمثلة: أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقاط التالية:

1. A = (1,1) ، وB = (3,3).
2. A = (1,3) ، وB = (3,-1).
3. A = (2,3) ، وB = (2,6).

الحلول:

$$1)\ \because m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$m = \frac{3-1}{3-1} = \frac{2}{2}$$

$$\therefore m = 1$$

$$2)\ \because m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$m = \frac{-1-3}{3-1} = \frac{-4}{2}$$

$$\therefore m = -2$$

$$3)\ \because m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$m = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0}$$

في الحالة الأخيرة إن الخط المستقيم غير معرَّف، ويكون شكل الدالة الخطيّة عمودياً.

أمثلة: أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين في كل مثال مما يلي:

1. (3- ,1)، و(3, 7).
2. (3, 2)، و(5, 2).
3. (2, 3)، و(2, 6).
4. (6, 2)، و(2, -6).

الحلول:

1. $\because m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

$$m = \frac{7-(-3)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

إذن العلاقة طردية (الخط المستقيم متزايد) لأن إشارة الميل موجبة.

2. $m = \frac{2-2}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$

إذن الخط المستقيم أفقي (دالة ثابتة)، لأن الميل = صفراً.

3. $m = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$

في هذه الحالة ميل الخط المستقيم غير معرَّف. ويكون شكله رأسياً (عمودياً).

4. $m = \frac{-6-(-2)}{2-6} = \frac{-4}{-4} = 1$

إذن العلاقة طردية، والخط المستقيم متزايد بزاوية 45 درجة.

ملاحظة:

يتحدَّد الخط المستقيم تماماً إذا عُلِمت منه:

1. نقطتان تنتميان إليه، كما في الأمثلة السابقة.
2. إذا عُلِمت منه نقطة تنتمي إليه وميله، وهذا ما سنتعلَّمه فيما يلي:

إذا أُعطينا نقطة واحدة تقع على خط مستقيم، وكذلك ميله، فبالإمكان الإستفادة من صيغة الميل لإيجاد معادلة الخط المستقيم (الدالة الخطية)، كما يلي:

$$\because m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

نعتبر النقطة الثانية هي (X, Y) فقط، فنكتب الصيغة:

$$m = \frac{Y - Y_1}{X - X_1}$$

$$\therefore Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

لأن: حاصل ضرب الطرفين= حاصل ضرب الوسطين.

ومن هذه الصيغة نجد معادلة الخط المستقيم (صيغة الدالة الخطيّة).

أمثلة:

مثال1: أوجد معادلة الخط المستقيم المار في النقطة (2, 4)، وميله m= -2.

الحل:

$$\because Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

$$\therefore Y - 4 = -2(X - 2)$$

$$\therefore Y = -2X + 2$$

وهي معادلة الخط المستقيم.

مثال2: أوجد معادلة الذي ميله m= -2، وحدّه الثابت a= 5؟

الحل: Y= -2X + 5

مثال3: أوجد الميل، والحد الثابت في الدوال الخطية التالية:

1. $3X + 5Y = 15$
2. $2X = 15 - 4Y$
3. $\frac{X}{2} + \frac{Y}{3} = 1$
4. $Y + 2X + 6 = 0$

الحلول:

1. $3X + 5Y = 15$

$5Y = -3X + 15$

$Y = \frac{-3}{5}X + 3$

$\therefore$ a= 3, m=$\frac{-3}{5}$

2. $2X = 15 - 4Y$

$4Y = -2X + 15$

$Y = -\frac{1}{2}X + \frac{15}{4}$

$\therefore$ a= $\frac{15}{4}$, m=$-\frac{1}{2}$

3. $\frac{X}{2} + \frac{Y}{3} = 1$

$\frac{Y}{3} = -\frac{X}{2} + 1$

نضرب الطرفين بالعدد +3:

$Y = -\frac{3}{2}X + 1$

$\therefore$ a= 1, m=$-\frac{3}{2}$

4. $Y + 2X + 6 = 0$

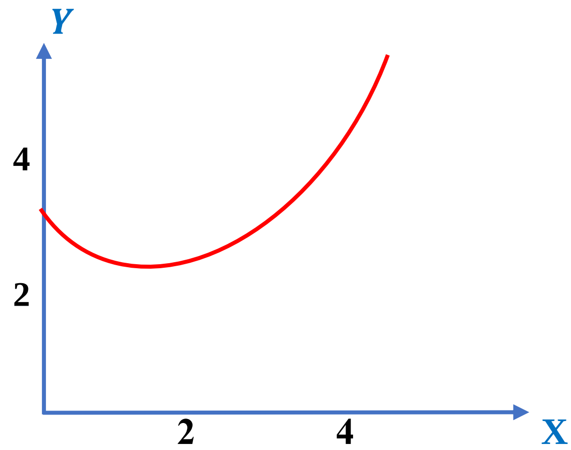
$Y = -2X - 6$

$\therefore$ a= -6, m=-2

3. الدالة التربيعية Quadratic Function:

هي الدالة التي يكون أعلى أُس فيها "للمتغير المستقل" هو العدد 2، وتأخذ شكل خطٍ مقوَّس. وتسمى أيضاً "دالة من الدرجة الثانية".

صيغتها العامة: $Y = aX^2 + bX + c$، مثل الشكل التالي:

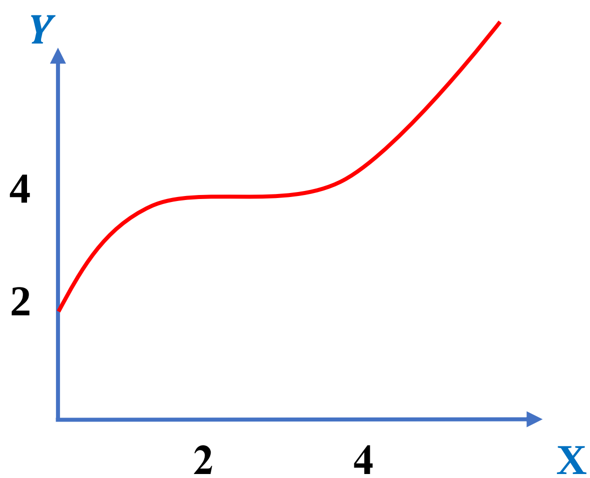


كدالة متوسط التكاليف الكلية ATC، دالة متوسط التكاليف المتغيرة الكلية AVC، دالة التكاليف الحديّة MC (جميع الدوال المذكورة عبارة عن أقواس مفتوحة للأعلى لأن الإشارة التي تسبق المتغير المستقل المربَّع موجبة)، الإيراد الكلّي TR (القوس مفتوح للأسفل لأن الإشارة التي تسبق المتغير المستقل المربَّع سالبة).

4. الدالة التكعيبية Cubic Function:

هي الدالة التي يكون أعلى أُس فيها "للمتغير المستقل" هو العدد 3، وتأخذ شكل الموجة. وتسمى أيضاً "دالة من الدرجة الثالثة".

صيغتها العامة: $Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$، مثل الشكل التالي:



كدالة التكاليف الكلية بالأجل القصير TC، ودالة التكاليف الكلية المتغيرة TVC في الأجل القصير.

5. الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function:

هي معكوس الدالة الأسيّة، ولها تطبيقات عديدة في العلوم الاقتصادية، من أهمها دالة الإنتاج لـ كوب- دوغلاس Cobb- Douglas. تلك التي تفسّر سلوك الإنتاج وعلاقته بعوامل الإنتاج المكوّنة له.

$$Q_t = A.K_t^{\alpha}.L_t^{\beta}$$

رسم الدوال

خطوات رسم الدوال: لرسم أية دالة، نقوم بالخطوات التالية:

أولاً: نجد أولاً عدد من النقاط من الدالة نفسها، تتضمّن كل نقطة إحداثي X (موجب دائماً في الدوال الاقتصادية)، وإحداثي Y، وكما يلي:

1. **الدالة الخطية:** نكتفي بإيجاد نقطتين فقط.
2. **الدوال غير الخطية:** نحتاج لعدد أكبر من النقاط (وكلما أكثرنا من عدد النقاط اتضحت الدالة بشكل أدق".
   ويتم إيجاد كل نقطة من خلال اختيارنا قيمة لـ X وتعويضها في الدالة لنحصل على قيمة Y المقابلة لها.

ثانياً: نضع تلك النقاط في جدول.

ثالثاً: تحديد النقاط في الشكل البياني، بحيث تكون النقطة مقابلة لإحداثيها السيني (X)، ولإحداثيها الصادي (Y).

مثال: ارسم الدالة التالية: $Y = X + 1$.

عندما X = 1

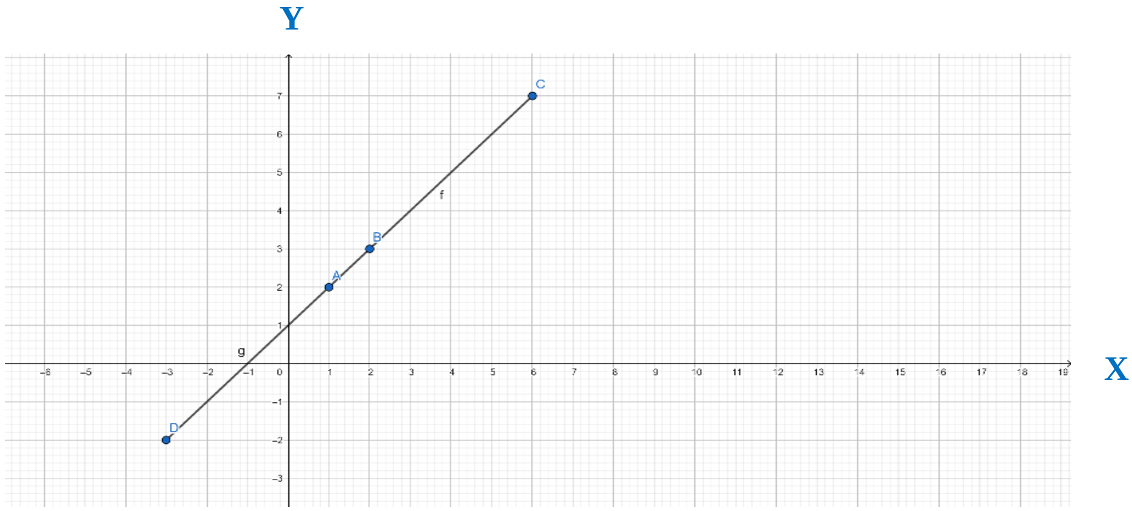
$$Y = 1 + 1 = 2$$

وعندما X = 2

$$Y = 2 + 1 = 3$$

X	Y	النقطة
1	2	(1,2)
2	3	(2,3)

نرسم الإحداثيات، ونحدّد النقطتين كما في الشكل:



مثال: ارسم الدالة التالية: $Y = 0.5X^2 + 2$.

$$Y = 0.5(0)^2 + 2$$

$$Y = 0 + 2 = 2$$

$$Y = 0.5(1)^2 + 2$$

$$Y = 0.5 + 2 = 2.5$$

$$Y = 0.5(2)^2 + 2$$

$$Y = 2 + 2 = 4$$

$$Y = 0.5(3)^2 + 2$$

$$Y = 4.5 + 2 = 6.5$$

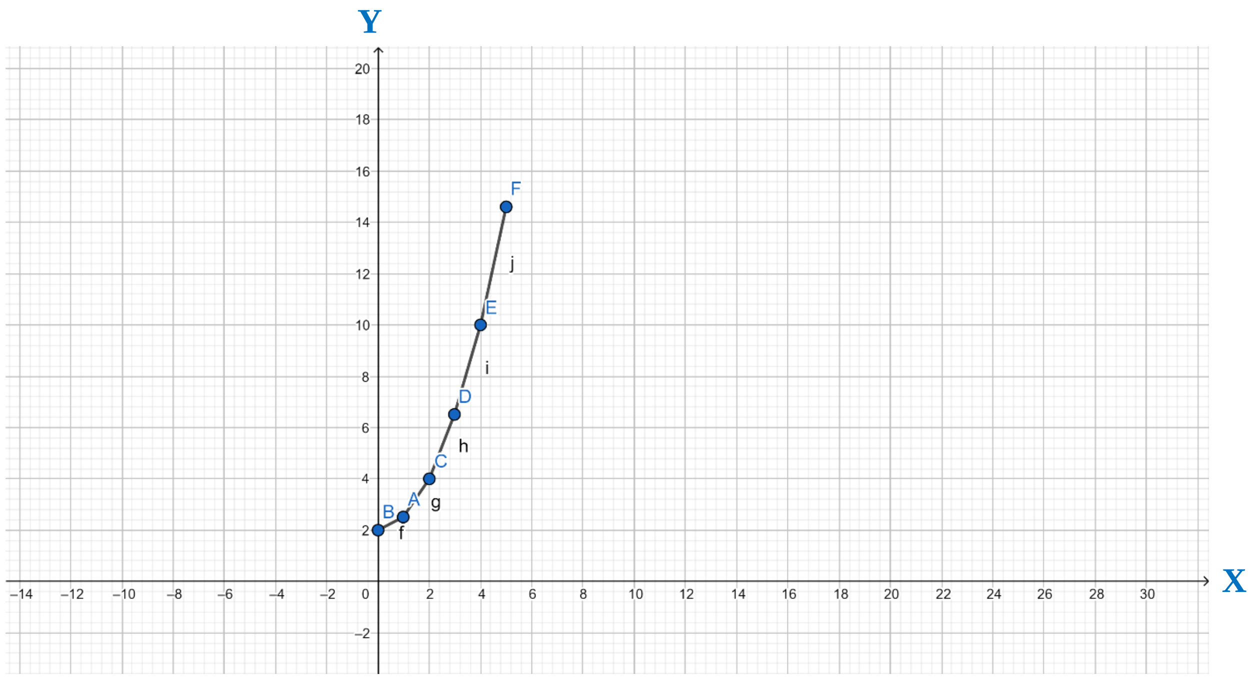
$$Y = 0.5(4)^2 + 2$$

$$Y = 8 + 2 = 10$$

$$Y = 0.5(5)^2 + 2$$

$$Y = 12.5 + 2 = 14.5$$

X	Y	النقطة
0	2	(0, 2)
1	2.5	(1, 2.5)
2	4	(2, 4)
3	6.5	(3, 6.5)
4	10	(4, 10)
5	14.5	(5, 14.5)



تمارين:

ارسم الدوال التالية:

1. $Y = 3X^2$
2. $Y = 3X^2 + 1$
3. $Y = -\frac{1}{2}X^2$
4. $f(x) = X^3$
5. $f(x) = -X^3$
6. $f(x) = 2 + X^3$

خواص الدوال الأُسيّة

1. **في حالة الضرب نجمع الأسس:**

$$2^2.2^3 = 2^5 = 32$$

$$3^1.3^2 = 3^3 = 27$$

2. **في حالة القسمة تُطرح الأسس:**

$$\frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$$

3. **قيمة أي حدّ أُسّه صفراً = 1 صحيح:**

$$2^0 = 1$$

$$7^0 = 1$$

4. **يتوزَّع أُس القوس على جميع عناصر ما بداخل القوس:**

$$(2\mathrm{X})^3 = 2^3.\mathrm{X}^3 = 8\mathrm{X}^3$$

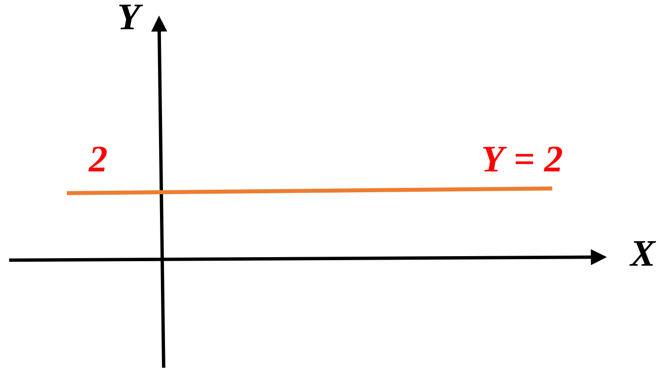
5. **إذا رُفع حدٌ أُسّي إلى أُس، فإنه نضرب كلا الأسين معاً:**

$$(X^2)^3 = X^6$$

حالات خاصة من الدوال

أولاً: الدالة الثابتة: وهي دالة خطية ميلها يساوي صفر $(b=0)$، وتكتب صيغتها كما يلي: $f(x) = K$، حيث K: هو عدد حقيقي.

مثال: $Y = 2$



ثانياً: الدالة الصريحة: عندما يكون المتغير التابع Y لوحده في جهة اليسار، وبقية الحدود في الجهة اليمين من الدالة. مثل:

$$Y = 2X + 5$$
$$f(x) = X^2 + 3x - 7$$

ثالثاً: الدالة الضمنية: عندما نضع جميع المتغيرات في جانب واحد من الدالة. مثل:

$$Y - 2X - 5 = 0$$
$$Y - X^2 - 3X = -7$$

رابعاً: الدالة الفرديّة: يقال للدالة أنها فردية إذا كان: $f(-x) = -f(x)$

مثال: هل أن الدالة التالية فردية؟ $f(x) = x^5 + x^3$

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 = -x^5 - x^3 = -(x^5 + x^3) = -f(x)$$

إذن الدالة فردية.

خامساً: الدالة الزوجية: يقال للدالة أنها زوجية إذا كان: $f(-x) = f(x)$

مثال: هل أن الدالة التالية زوجية؟ $f(x) = x^2$

نعم الدالة زوجية.

ملاحظة: هناك دوال ليست فردية ولا زوجية، مثل: $F(x) = x^3 + 1$

سادساً: الدالة العكسية: هي أن نجعل المتغير التابع مستقلاً، والمتغير المستقل تابعاً.

مثلاً، الدالة $Y = f(x)$، نكتب دالتها العكسية كما يلي: $X = F^{-1}(Y)$

مثال1: أوجد الدالة العكسية للدالة التالية: $Y = 2X + 1$

الحل: $2X = Y - 1$

وبهذا تكون الدالة العكسية بالصيغة: $F^{-1}(Y) = \frac{Y-1}{2}$

مثال 2: أوجد الدالة العكسية للدالة: $Y = X^3$

الحل: $X^3 = Y$

$$\sqrt[3]{X^3} = \sqrt[3]{Y}$$

$$\therefore X = \sqrt[3]{Y}$$

ملاحظة: ليس من الضروري أن يكون لكل دالة عكس.

سابعاً: الدالة الأحادية: يقال للدالة بأنها أحادية، إذا كان $X_1, X_2 \in R$. حيث أن: $X_1 \neq X_2$

فإن: $F(X_1) \neq F(X_2)$

مثال1: إن الدالة $F(X) = 2X$ هي دالة أحادية، لأن النتيجة لن تتكرر عند تغيير قيمة X.

بينما $F(X) = X^2$ هي دالة ليست أحادية لأن: $F(-1) = F(1)$

مثال2: أي من الدوال التالية أحادية مما يلي:

$F(X) = X^3 + 2$

$F(X) = 4X^2 + 3$

$F(X) = X_2 + 1$

نطاق الدالة ومداها

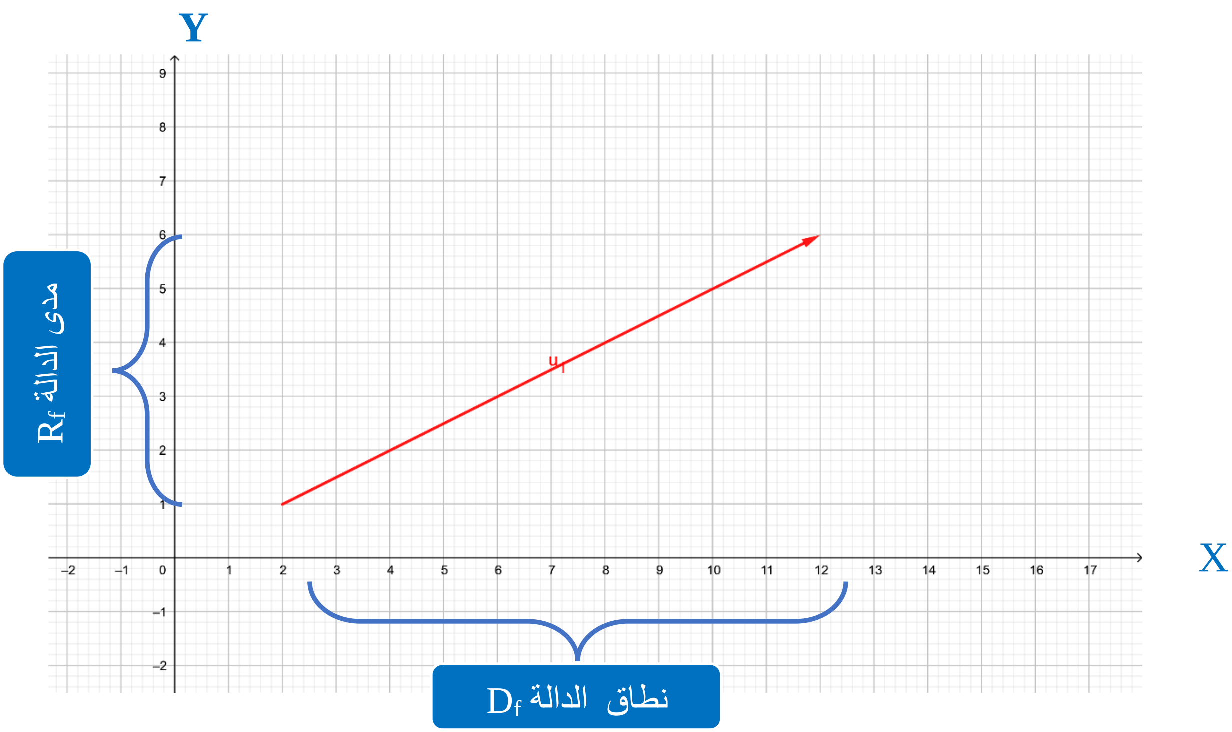
عادةً تعبّر الدالة عن علاقة سلوكية، فإذا تغيّرت قيمة **X** فإن قيمة **Y** تتغيّر أيضاً، لنحصل على أزواجٍ من القيم المرتَّبة **(X,Y)**، أي إذا حصلنا على قيمة أحدهما فإننا نجد قيمة الآخر.

ويُطلق على مجموعة عناصر **(X)** الممكنة **نطاق الدالة (أو مجالها) (Domain)**؛ وعلى عناصر **(Y)** الممكنة **مدى الدالة (Range)**.

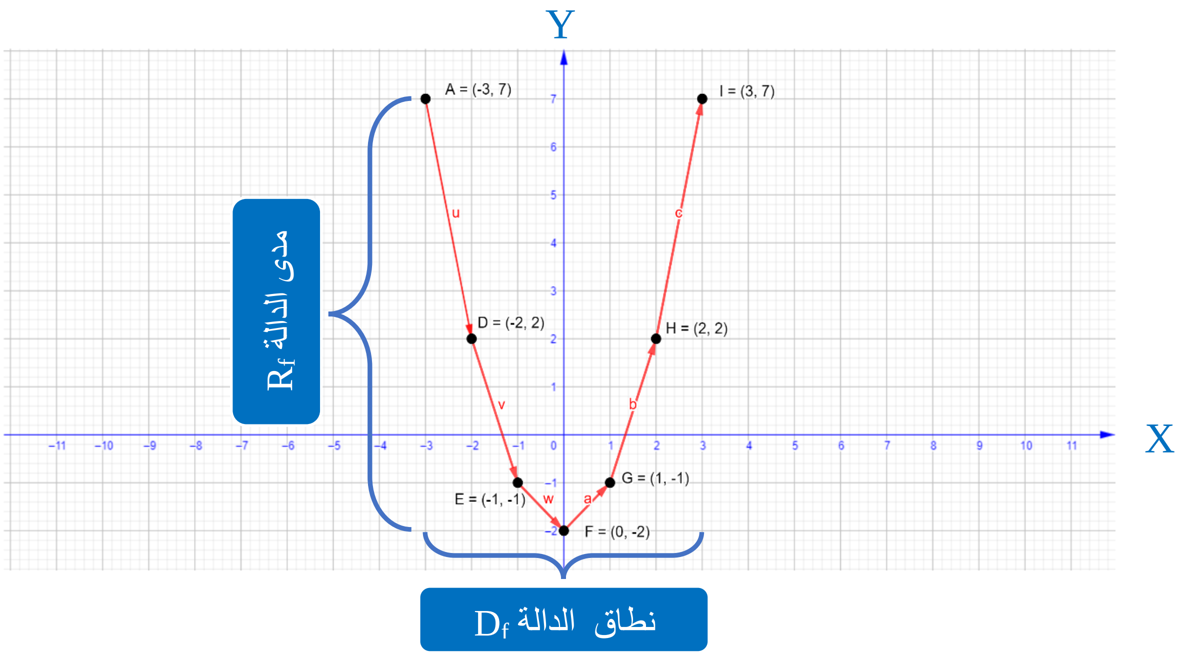
في الشكلين التاليين نبيّن نطاق ومدى الدالتين التاليتين:

$$\boldsymbol{Y = 0.5X,}$$

$$\boldsymbol{\{X \in R : 2 \leq X \leq 12\}}$$



$$\boldsymbol{Y = -2 + X^2 , \quad \{X \in R : -3 \leq X \leq 3\}}$$



إذن: نطاق الدالةٌ (D_f): جميع القيم الواقعة على المحور الأفقي **(X)** في الرسم البياني لدالة ما. أو هي جميع قيم المتغير المستقل التي يمكن أن نجد لها قيم مناظرة في المتغير التابع **(Y)**.أو قيم X الممكنة في الدالة.

وإنَّ مدى الدالة (R_f): جميع القيم الواقعة على المحور الرأسي **(Y)** في الرسم البياني لدالة ما. أو هي جميع قيم **(Y)** الممكنة في الدالة.

ملاحظات مهمة: عند إيجاد نطاق الدالة (D_f) لابد من تحقق الشروط التالية:

1. **ألا يكون ما تحت الجذر الزوجي قيمة سالبة الإشارة.**

مثال: إن نطاق الدالة $f(X) = \sqrt{X}$، هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة، وذلك حيث أن الجذر الزوجي يكون معرَّفاً فقط لجميع قيم **(X)** بحيث $X \geq 0$.
$[0, +\infty)$

2. **ألّا يكون المقام صفراً، لأننا نحصل بذلك على قيمة غير معرّفة.**

مثال: إن نطاق الدالة $Y = \frac{X^2}{X-3}$، يكون مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $X = 3$، لأنه عندما $X = 3$ يصبح المقام صفراً، وبالتالي تكون Y غير معرَّفة.

مثال 1: أوجد نطاق الدالة $f(X)$ ومداها، حيث أن: $f(X) = 10 - 2X$.

الحل: من ملاحظة الدالة في أعلاه، لا يوجد قيد "أو مشكلة رياضية" على إمكانية التعويض بأي عدد حقيقي بدلاً عن المتغير X. لذلك فإن نطاق الدالة هو: كل الأعداد الحقيقية. أي أن:

$$\therefore D_f = \{X \in R\}$$

لإيجاد مدى الدالة نستبدل عبارة $f(X)$ بالرمز Y ، ونجد معكوس الدالة *(Inverse Function)* أولاً، وكما يلي:

$$Y = 10 - 2X$$

نحوّل Y إلى يمين الدالة، و X إلى يسار الدالة.

$$2X = 10 - Y$$

$$\therefore X = \frac{10 - Y}{2}$$

وبهذا يتبيّن أنّه لا يوجد قيد "أو مشكلة رياضية" على إمكانية التعويض بأي عدد حقيقي بدلاً عن المتغير Y. لذلك فإنّ مدى الدالة هو: كل الأعداد الحقيقية. أي أنَّ:

$$\therefore R_f = \{Y \in R\}$$

مثال 2: أوجد نطاق الدالة $f(X)$ ومداها، حيث أن: $f(X) = \frac{X+3}{X-2}$.

الحل:

يتضح بأن $f(X)$ ليست عدداً حقيقياً عند $X = 2$ لأن المقام سيساوي صفراً، وبالتالي فإن نطاق الدالة هو: مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $X = 2$. أي أنَّ:

$$\therefore D_f = \{X \in R : X \neq 2\}$$

ولإيجاد مدى الدالة $f(X)$ فإننا نكتب Y بدلاً من $f(X)$ ، ونجد معكوس الدالة، كما يلي:

$$\frac{Y}{1} = \frac{X+3}{X-2}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين، نحصل على:

$$Y.(X-2) = X+3$$

$$XY - 2Y = X+3$$

$$XY - 2X = 2Y+3$$

$$X(Y-1) = 2Y+3$$

$$\frac{X(Y-1)}{(Y-1)} = \frac{2Y+3}{(Y-1)}$$

$$\therefore X = \frac{2Y+3}{Y-1}$$

ومن الصيغة السابقة نلاحظ إن Y يمكن أن تأخذ أي قيمة عدا الواحد، ولذلك فإن مدى الدالة: هو:

$$\therefore R_f = \{Y \in R: Y \neq 1\}$$

مثال 3: عيّن نطاق الدالة $f(X)$ ومداها، حيث أن: $f(X) = \sqrt{X-4}$.

الحل:

نطاق الدالة $f(X)$ هو مجموعة الأعداد التي إن عوضناها بدلاً عن X ستكون قيمة ما تحت الجذر التربيعي عدد حقيقي غير سالب، أي أنَّ: $X-4 \geq 0$، أو: $X \geq 4$.

وبالتالي فإن نطاق الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من العدد 4 أو تساويها.

$$\therefore D_f = \{\mathrm{X} \in \mathrm{R}: \mathrm{X} \geq 4\}$$

ولإيجاد مدى الدالة $f(X)$ فإننا نكتب Y بدلاً من $f(X)$، ونجد معكوس الدالة:

$$Y = \sqrt{X-4}$$

نربّع الدالة لغرض التخلّص من الجذر، وكما يلي:

$$(Y)^2 = (\sqrt{X-4})^2$$

$$Y^2 = X - 4$$

$$-X = -Y^2 - 4$$

نضرب الدالة (طرفيها الأيسر والأيمن) بإشارة سالبة، حتى يبقى **X** لوحده في جهة اليسار، وكما يلي:

$$X = Y^2 + 4$$

وعند النظر للصيغة التي وجدناها في أعلاه "معكوس الدالة الأصلية" نجد بأن المتغير لا يوجد في مقام كسر، ولا تحت جذر زوجي. لذا فإنه من الممكن أن يتخذ المتغير **Y** أي قيمة لأي عدد حقيقي، ولا مشكلة في ذلك. هذا يعني بأن مدى الدالة هو كل الأعداد الحقيقية بلا استثناء.

$$\therefore R_f = \{Y \in R\}$$

تمارين غير محلولة:

عيّن نطاق كل دالة من الدوال التالية ومداها.

a. $f(X) = X^2 - 2$

b. $g(X) = \frac{1}{3-X}$

c. $h(X) = -\sqrt{3-3X}$

أسئلة محلولة عن نطاق الدالة ومداها

س: أوجد نطاق الدالة التالية ومداها:

$$\boldsymbol{f(X) = X^2 - 2}$$

نطاق الدالة هو كل الأعداد الحقيقية:

أي أن: $Df = \{X \in R\}$

ولإيجاد مدى الدالة، نجد معكوس الدالة $F(X)^{-1}$ أولاً، بحيث نستبدل رمز الـ *f(X)* بـ Y:

$$Y = X^2 - 2$$

$$-X^2 = -Y - 2$$

نضرب الدالة بإشارة سالبة:

$$X^2 = Y + 2$$

نجذر الطرفين للتخلص من علامة التربيع:

$$\sqrt{X^2} = \sqrt{Y + 2}$$

$$X = \sqrt{Y + 2}$$

وبذلك فإن مدى الدالة هو كل الأعداد الحقيقية التي لا تجعل مما تحت الجذر قيمة سالبة. أي يجب أن يكون:

$$Y + 2 \geq 0$$

$$Y \geq -2$$

إذن مدى الدالة هو:

$$Rf = \{Y \in R: Y \geq -2\}$$

س: أوجد نطاق الدالة التالية ومداها:

$$\boldsymbol{g(X) = 5X + \frac{1}{3 - X}}$$

نطاق الدالة هو كل الأعداد الحقيقية عدا العدد +3، لأنه سيجعل المقام مساوياً للصفر، وبالتالي فإن ناتج عملية التقسيم تكون قيمة غير معرَّفة.

$$Df = \{X \in R: X \neq +3\}$$

لإيجاد مدى الدالة يجب أن نجد أولاً معكوس الدالة $g(X)^{-1}$.

نعوض بدلاً عن الـ g(X) بالرمز :Y

$$Y = \frac{1}{3 - X}$$

$$\frac{Y}{1} = \frac{1}{3 - X}$$

$$Y(3 - X) = 1$$

$$3Y - XY = 1$$

$$-XY = -3Y + 1$$

نضرب الدالة بإشارة سالبة:

$$XY = 3Y - 1$$

$$\frac{XY}{Y} = \frac{3Y - 1}{Y}$$

$$X = \frac{3Y - 1}{Y}$$

يتضح من معكوس الدالة التي في أعلاه، بأن: مدى الدالة هو كل الأعداد الحقيقية عدا العدد صفر، لأنه سيجعل من المقام صفراً، وبالتالي نتيجة القسمة قيمة غير معرَّفة.

$$Rf = \{Y \in R: Y \neq 0\}$$

س: أوجد نطاق الدالة التالية ومداها:

$$\boldsymbol{h(X) = -\sqrt{3 - 3X}}$$

نطاق الدالة هو كل الأعداد الحقيقية التي تجعل من نتيجة ما تحت الجذر الزوجي قيمة غير سالبة

$$3 - 3X \geq 0$$

$$-3X \geq -3$$

نقسم الطرفين على -3، ونعكس علامة التباين بسبب التقسيم على عدد سالب.

$$\frac{-3X}{-3} \leq \frac{-3}{-3}$$

$$X \leq 1$$

وبذلك فإن نطاق الدالة (قيم X الممكنة في الدالة) هي كل الأعداد الحقيقية الأصغر من العدد 1 أو تساويه.

$$Df = \{X \in R : X \leq 1\}$$

نعكس الدالة لإيجاد مداها:

$$Y = -\sqrt{3 - 3X}$$

نربع الطرفين للتخلص من الجذر التربيع:

$$(Y)^2 = \left(-\sqrt{3 - 3X}\right)^2$$

$$Y^2 = 3 - 3X$$

$$3X = 3 - Y^2$$

نقسِّم على معامل X:

$$X = \frac{3 - Y^2}{3}$$

وبذلك يكون المدى هو كل الأعداد الحقيقية بلا استثناء.